Prva zadaća iz Realne i funkcionalne analize

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

25. siječnja 2010.

1. Funkciju apsolutne vrijednosti jednoliko aproksimirati polinomima na segmentu $[-1,1]$.

Rješenje. Prvo definiramo niz polinoma $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, koji jednoliko konvergira prema funkciji $t \mapsto \sqrt{t}$. (Ideja je preuzeta iz [1, str. 256].) Definicija je induktivna:

$$\begin{aligned} q_0(t) &= 0\,, \\ q_{n+1}(t) &= q_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - q_n^2(t)\big), \quad n \geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Indukcijom po n dokazujemo da za svaki $t \in [0,1]$ vrijede nejednakosti:

$$0 \leqslant \sqrt{t} - q_n(t) \leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\,.$$

Baza evidentno vrijedi. Pretpostavimo da nejednakosti vrijede za neki n. Tada imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - q_{n+1}(t) &= \big(\sqrt{t} - q_n(t)\big) - \frac{1}{2}\big(t - q_n^2(t)\big) \\ &= \big(\sqrt{t} - q_n(t)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + q_n(t)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

Manipulacijom desne nejednakosti u pretpostavci indukcije dobije se

$$\frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}} \leqslant \sqrt{t} + q_n(t)\,.$$

Slijedi

$$1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + q_n(t)\big) \leqslant 1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\,.$$

S druge strane, iz $\sqrt{t} - q_n(t) \geqslant 0$ slijedi

$$2\sqrt{t} \geqslant \sqrt{t} + q_n(t)$$

te stoga

$$1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + q_n(t)\big) \geqslant 1 - \sqrt{t} \geqslant 0\,.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sqrt{t} - q_{n+1}(t) &= \big(\sqrt{t} + q_n(t)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + q_n(t)\big)\Big) \\ &\leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\Big(1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\Big) = \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\,. \end{aligned}$$

Time je indukcija završena.

Sad iskoristimo činjenicu da za svaki $t \geqslant 0$ vrijedi

$$\frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leqslant \frac{2}{n}$$

kako bismo zaključili da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $t \in [0,1]$ vrijedi

$$|\sqrt{t} - q_n(t)| \leqslant \frac{2}{n}\,.$$

Neka je sada $t = x^2$ za $x \in [-1,1]$. Označimo s $p_n(x)$ polinom $q_n(x^2)$ za $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\sqrt{x^2} = |x|$, iz dosad dokazanog imamo

$$\big||x| - p_n(x)\big| \leqslant \frac{2}{n}\,, \quad x \in [-1,1]\,.$$

Prema tome, niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednoliko konvergira prema funkciji apsolutne vrijednosti na segmentu $[-1,1]$. □

2. Pokazati da je normirani prostor E potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red u E konvergira u E.

Rješenje. Pretpostavimo da je E potpun, a $\sum x_n$ je apsolutno konvergentan red u E. Tada konvergira red $\sum\|x_n\|$ (u $\mathbb{R}$). Drugim riječima, konvergira niz parcijalnih suma $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je

$$s'_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|\,,$$

pa je taj niz Cauchyjev:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})\ m,n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |s'_m - s'_n| < \varepsilon\,.$$

Promotrimo sad niz parcijalnih suma $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\,.$$

Ukoliko je $\varepsilon > 0$ i $m \geqslant n \geqslant n_0$, vrijedi

$$\|s_m - s_n\| = \Big\|\sum_{n<k\leqslant m} x_k\Big\| \leqslant \sum_{n<k\leqslant m} \|x_k\| = s'_m - s'_n < \varepsilon\,.$$

Prema tome, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev, a onda zbog potpunosti prostora E i konvergentan niz. No to znači da je konvergentan red $\sum x_n$.

Obrnuto, pretpostavimo da svaki apsolutno konvergentan red u E konvergira u E. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u E. Tada

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})\ m,n \geqslant n_k \ \Rightarrow\ \|x_m - x_n\| < 2^{-k}\,,$$

pri čemu se brojevi n_k mogu izabrati tako da je niz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strogo rastući. Definiramo novi niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u E:

$$\begin{aligned} y_0 &:= x_{n_0} \\ y_{k+1} &:= x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Zbog $\|y_{k+1}\| = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ je red $\sum\|y_{k+1}\|$ majoriran geometrijskim redom $\sum 2^{-k}$ pa je konvergentan. No tada je red $\sum y_k$ apsolutno konvergentan, što po pretpostavci povlači da je red $\sum y_k$ konvergentan. To pak znači da konvergira niz parcijalnih suma:

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} y_k = x_{n_k} ,$$

tj. postoji $v = \lim_k x_{n_k}$.

Pokažimo da je v limes niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \varepsilon/2$ i $\|x_{n_k} - v\| < \varepsilon/2$. Tada za $n \geqslant n_k$ vrijedi $\|x_n - x_{n_k}\| < 2^{-k}$. Slijedi

$$\|x_n - v\| \leqslant \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - v\| < 2^{-k} + \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

Dakle, proizvoljan Cauchyjev niz u E je konvergentan, što znači da je E potpun prostor. $\square$

3. U ovom, kao i u nekoliko sljedećih zadataka, opisivat ćemo norme na prostorima neprekinutih funkcija s vrijednostima u vektorskom prostoru.

a*) Neka je S proizvoljan skup, a E realan ili kompleksan vektorski prostor. Tada je E^S, skup svih funkcija sa S u E, sa zbrajanjem funkcija i množenjem skalara definiranim po točkama:

$$\begin{aligned}(u+v)(s) &:= u(s) + v(s) ,\\ (\lambda u)(s) &:= \lambda u(s) ,\end{aligned}$$

vektorski prostor.

Rješenje. Provjerimo da je $(E^S, +)$ Abelova grupa. Asocijativnost i komutativnost se svode na asocijativnost i komutativnost zbrajanja u prostoru E. Neutralni element je nul-funkcija $\mathbf{0}\colon S \to E$, $\mathbf{0}(s) := 0$. Suprotan (inverzan) element za funkciju $u\colon S \to E$ je funkcija $(-u)\colon S \to E$ definirana s $(-u)(s) := -u(s)$.

Usklađenost skalarnog množenja sa zbrajanjem u E^S očito proizlazi iz usklađenosti skalarnog množenja sa zbrajanjem u E. Prema tome, E^S je doista vektorski prostor. $\square$

b) Ukoliko je E i normiran prostor, onda s $\mathrm{B}(S;E)$ označujemo podskup E^S koji se sastoji od svih omeđenih funkcija, odnosno takvih da je

$$\|u\|_{\mathrm{B}(S;E)} := \sup_{s\in S}\|u(s)\|_E < \infty .$$

Pokazati da je $(BE(S;E), \|\cdot\|_{\mathrm{B}(S;E)})$ normiran vektorski prostor.

Rješenje. Prvo pokažimo da je $\mathrm{B}(S;E)$ potprostor prostora E^S. U tu svrhu neka su λ, μ dva skalara, a $u, v \in \mathrm{B}(S;E)$. Ako odgovarajuće supremume označimo s U, V, onda za proizvoljan $s \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|(\lambda u + \mu v)(s)\|_E &= \|\lambda u(s) + \mu v(s)\|_E\\ &\leqslant |\lambda|\|u(s)\|_E + |\mu|\|v(s)\|_E\\ &\leqslant |\lambda|U + |\mu|V .\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\sup_{s\in S}\|(\lambda u + \mu v)(s)\|_E \leqslant |\lambda|U + |\mu|V < \infty ,$$

tj. $\lambda u + \mu v \in \mathrm{B}(S;E)$.

Pokažimo sad da je $\|\cdot\|_{\mathrm{B}(S;E)}$ norma na prostoru $\mathrm{B}(S;E)$. Pozitivna definitnost evidentno slijedi iz pozitivne definitnosti norme $\|\cdot\|_E$. Homogenost također. Nejednakost trokuta smo zapravo već provjerili kod dokaza da je $\mathrm{B}(S;E)$ potprostor od E^S: samo stavimo $\lambda = \mu = 1$. Pritom je bila ključna nejednakost trokuta za normu $\|\cdot\|_E$. $\square$

c) Ako je E potpun (Banachov prostor), onda je i $\mathrm{B}(S;E)$ Banachov prostor.

Rješenje. Neka je $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u $\mathrm{B}(S;E)$. To znači da vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m, n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \|u_m - u_n\|_{\mathrm{B}(S;E)} < \varepsilon\,.$$

Specijalno, iz definicije norme na $\mathrm{B}(S;E)$ slijedi da za svaki $s \in S$ vrijedi

$$\|u_m(s) - u_n(s)\|_E = \|(u_m - u_n)(s)\|_E \leqslant \|u_m - u_n\|_{\mathrm{B}(S;E)} < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Dakle, za svaki $s \in S$ je niz $(u_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev pa je zbog potpunosti prostora E konvergentan. Tj. postoji

$$u(s) := \lim_n u_n(s)\,.$$

Time je definirana funkcija $u\colon S \to E$.

Lako se vidi da je u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ norma (čak jednoliko) neprekidna funkcija. To slijedi iz činjenice da je

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|\,,$$

što se lako pokaže koristeći nejednakost trokuta.

Tako je i $\|\cdot\|_E$ neprekidna, što nam omogućuje da u (1) prijeđemo na limes po m:

$$\|u(s) - u_n(s)\|_E = \|\lim_m u_m(s) - u_n(s)\|_E = \lim_m \|u_m(s) - u_n(s)\|_E \leqslant \varepsilon\,.$$

S obzirom da to vrijedi za svaki $s \in S$, zaključujemo

$$\sup_{s\in S} \|u(s) - u_n(s)\|_E \leqslant \varepsilon\,.$$

Dakle, za svaki $n \geqslant n_0$ je funkcija $u - u_n \in \mathrm{B}(S;E)$. Kako je $\mathrm{B}(S;E)$ vektorski prostor, to je i $u = (u - u_n) + u_n \in \mathrm{B}(S;E)$. Nadalje, kako za proizvoljan $\varepsilon > 0$ i za $n \geqslant n_0$ imamo

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{B}(S;E)} \leqslant \varepsilon\,,$$

to je $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i konvergira k u.

Pokazali smo da proizvoljan Cauchyjev niz u $\mathrm{B}(S;E)$ konvergira i time dokazali da je $\mathrm{B}(S;E)$ Banachov prostor. $\square$

d) Ako namjesto normiranog prostora E uzmemo normiranu algebru A (što je posebno slučaj za realne ili kompleksne funkcije), onda je $\mathrm{B}(S;A)$ također normirana algebra, koja je potpuna (dakle, Banachova algebra) ako je i A potpuna.

Rješenje. Već smo pokazali da je $\mathrm{B}(S;A)$ normiran vektorski prostor. Ako je A normirana algebra, onda se na A^S definira množenje funkcija po točkama:

$$(uv)(s) := u(s)v(s)\,.$$

Moramo pokazati da je za $u, v \in \mathrm{B}(S;A)$ umnožak $uv \in \mathrm{B}(S;A)$:

$$\|(uv)(s)\|_A = \|u(s)v(s)\|_A \leqslant \|u(s)\|_A\|v(s)\|_A \leqslant \|u\|_{\mathrm{B}(S;A)}\|v\|_{\mathrm{B}(S;A)}\,.$$

Time smo uz $uv \in \mathrm{B}(S;A)$ pokazali i sljedeće:

$$\|uv\|_{\mathrm{B}(S;A)} = \sup_{s\in S}\|(uv)(s)\|_A \leqslant \|u\|_{\mathrm{B}(S;A)}\|v\|_{\mathrm{B}(S;A)}\,.$$

Ostala svojstva (asocijativnost množenja, distributivnost množenja prema zbrajanju i svojstvo da je $\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$) evidentno proizlaze iz istih svojstava za A. Nadalje, ako je A algebra s jedinicom 1_A, onda je konstantna funkcija $\mathbf{1}\colon S \to A$ definirana s $\mathbf{1}(s) := 1_A$ jedinica u $\mathrm{B}(S;A)$ i evidentno vrijedi $\|\mathbf{1}\|_{\mathrm{B}(S;A)} = 1$.

Potpunost u slučaju potpunosti normirane algebre A dokazana je u prethodnom podzadatku. $\square$

e) Ukoliko je prostor E konačno dimenzionalan, dokazati da je $\mathrm{B}(S;E)$ izomorfan direktnoj sumi konačno mnogo kopija prostora $\mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ (odnosno prostora $\mathrm{B}(S;\mathbb{C})$, ukoliko je prostor E kompleksan).

Rješenje. Bitna činjenica koja se koristi u rješenju ovog zadatka je da su sve norme na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru ekvivalentne. Stoga dokažimo prvo tu tvrdnju. Neka je V vektorski prostor dimenzije $m \in \mathbb{N}$ i neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ norme na V. Fiksiramo bazu $(v_1, \ldots, v_m)$ i definiramo novu normu:

$$\|\xi_1 v_1 + \ldots + \xi_m v_m\| := |\xi_1| + \ldots + |\xi_m|\,. \tag{2}$$

Pokazat ćemo da su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ ekvivalentne s $\|\cdot\|$, što povlači da su i međusobno ekvivalentne.

Pokažimo prvo da su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ neprekidne s obzirom na topologiju induciranu normom $\|\cdot\|$. U tu svrhu uvedimo oznake $M_j := \max\{\|v_1\|_j, \ldots, \|v_m\|_j\}$ za $j = 1, 2$. Ako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $\delta_j := \varepsilon/M_j$, onda za $x = x_1v_1 + \ldots x_mv_m$ i $y = y_1v_1 + \ldots + y_mv_m$ takve da je $\|x - y\| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\big|\|x\|_j - \|y\|_j\big| &\leqslant \|x-y\|_j \\
&\leqslant |x_1 - y_1|\|v_1\|_j + \ldots + |x_m - y_m|\|v_m\|_j \\
&\leqslant M_j\|x - y\| < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Sad pogledamo jediničnu sferu s obzirom na $\|\cdot\|$:

$$S = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}\,.$$

Budući da je S kompaktan skup, norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ postižu na njemu svoje minimume i maksimume. Postoje, dakle, pozitivni realni brojevi $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ takvi da za $v \in S$ vrijedi

$$\alpha_j \leqslant \|v\|_j \leqslant \beta_j\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Stoga za proizvoljan $0 \neq v \in V$ i $j = 1, 2$ vrijedi

$$\alpha_j \leqslant \big\| v/\|v\| \big\|_j \leqslant \beta_j \,,$$

$$\alpha_j \|v\| \leqslant \|v\|_j \leqslant \beta_j \|v\| \,.$$

Time je tvrdnja dokazana. Posljedica je da nije bitno koju točno normu na E, odnosno $\mathbb{R}$ razmatramo: omeđeni skupovi su omeđeni s obzirom na svaku normu, a samim time su i omeđene funkcije omeđene s obzirom na svaku normu. Dakle, $\mathrm{B}(S;E)$ i $\mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ su, kao skupovi i kao vektorski prostori, neovisni o normi na E, odnosno $\mathbb{R}$.

Neka je $\dim E = n$. Tada je $E \cong \mathbb{R}^n$ i postoje baza $(e_1, \ldots, e_n)$ prostora E i izomorfizam vektorskih prostora $\varphi \colon E \to \mathbb{R}^n$ takav da je $\varphi(e_i)$ i-ti vektor kanonske baze za $\mathbb{R}^n$.

Dokažimo prvo da je E^S izomorfan prostoru $\mathbb{R}^S \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^S$ (n kopija). U tu svrhu neka su definirane projekcije $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i inkluzije $\iota_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i \,,$$

$$\iota_i(x) := (\delta_{i1}x, \ldots, \delta_{in}x) \,,$$

pri čemu je δ_{ij} Kroneckerov simbol (1 ako je $i = j$, 0 inače). Nadalje, definiramo preslikavanje $\Phi \colon E^S \to \mathbb{R}^S \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^S$:

$$\Phi(u) := (\pi_1 \circ \varphi \circ u, \ldots, \pi_n \circ \varphi \circ u) \,.$$

Jednostavno se pokaže da je Φ izomorfizam vektorskih prostora. Primjerice, aditivnost proizlazi iz sljedećeg:

$$\begin{aligned}(\pi_i \circ \varphi \circ (u + v))(s) &= (\pi_i \circ \varphi)(u(s) + v(s)) \\ &= (\pi_i \circ \varphi)(u(s)) + (\pi_i \circ \varphi)(v(s)) \\ &= (\pi_i \circ \varphi \circ u + \pi_i \circ \varphi \circ v)(s) \,,\end{aligned}$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}^S$ i sve $s \in S$. Pritom smo koristili definiciju zbrajanja u $\mathbb{R}^S$ i činjenicu da su φ i projekcije π_i aditivne funkcije. Analogno se pokaže homogenost. Injektivnost proizlazi iz jednostavne provjere da je jezgra operatora Φ trivijalna, a surjektivnost dobijemo tako da za proizvoljne funkcije $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^S$ pokažemo da za funkciju $u \in E^S$ definiranu s

$$u := \sum_{i=1}^{n} \varphi^{-1} \circ \iota_i \circ u_i \tag{3}$$

vrijedi $\Phi(u) = (u_1, \ldots, u_n)$.

Da bismo riješili zadatak, pokazat ćemo da je upravo restrikcija operatora Φ na $\mathrm{B}(S;E)$ traženi izomorfizam vektorskih prostora između $\mathrm{B}(S;E)$ i $\mathrm{B}(S;\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ (n kopija). Prvo označimo $M := \max\{\|e_1\|_E, \ldots, \|e_n\|_E\}$ i uvedimo dodatne norme: $\|\cdot\|$ na E neka je definirana kao u (2) (pritom je $V = E$, $m = n$ te $v_i = e_i$), dok su norme $\|\cdot\|_i$ na $\mathbb{R}$ za $i = 1, \ldots, n$ dane s

$$\|x\|_i := \|(\varphi^{-1} \circ \iota_i)(x)\|_E \,.$$

Neka je $u \in \mathrm{B}(S;E)$. Moramo pokazati da je $\pi_i \circ \varphi \circ u \in \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Pa neka je $s \in S$ proizvoljan i neka je $u(s) = \alpha_1(s)e_1 + \ldots + \alpha_n(s)e_n$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\|(\pi_i \circ \varphi \circ u)(s)\|_i &= \|(\varphi^{-1} \circ \iota_i \circ \pi_i \circ \varphi \circ u)(s)\|_E \\ &= \|\alpha_i(s)e_i\|_E = |\alpha_i(s)|\|e_i\|_E \\ &\leqslant M\|u(s)\| \leqslant MC\|u(s)\|_E \leqslant MC\|u\|_{\mathrm{B}(S;E)} \,,\end{aligned}$$

pri čemu je C konstanta takva da je $\|\cdot\| \leqslant C\|\cdot\|_E$. Dakle, $\pi_i \circ \varphi \circ u$ je omeđena jer krajnja desna strana ne ovisi o s. Drugim riječima, Φ restringiran na $\mathrm{B}(S;E)$ je doista funkcija s $\mathrm{B}(S;E)$ u $\mathrm{B}(S;\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$.

Još valja pokazati da je surjekcija (homomorfizam i injekcija i dalje jest). Neka su, dakle, $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ proizvoljne. Pokažimo da je funkcija dana s (3) omeđena:

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_E = \left\|\sum_{i=1}^{n}(\varphi^{-1} \circ \iota_i \circ u_i)(s)\right\|_E &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\|(\varphi^{-1} \circ \iota_i)(u_i(s))\|_E \\ &= \sum_{i=1}^{n}\|u_i(s)\|_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i|u_i(s)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i\|u_i\|_{\mathrm{B}(S;\mathbb{R})}\,, \end{aligned}$$

pri čemu su C_i konstante takve da je $\|\cdot\|_i \leqslant C_i|\cdot|$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Opet, krajnja desna strana ne ovisi o s pa je u omeđena funkcija.

U slučaju da je E kompleksan prostor, svi argumenti i dalje prolaze, tako da je

$$\mathrm{B}(S;E) \cong \mathrm{B}(S;\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{B}(S;\mathbb{C}) \ (n \text{ kopija}).$$

□

f) Dokazati da je preslikavanje $u \mapsto \sup_{t\in S} u(t)$ neprekinuto na $\mathrm{B}(S;\mathbb{R})$.

Rješenje. Pokazat ćemo da za proizvoljne funkcije $u, v \in \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ vrijedi

$$|\sup_{t\in S} u(t) - \sup_{t\in S} v(t)| \leqslant \sup_{t\in S}|u(t) - v(t)|\,. \tag{4}$$

Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi

$$\sup_{t\in S}|u(t) - v(t)| < |\sup_{t\in S} u(t) - \sup_{t\in S} v(t)|\,.$$

Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\sup_{t\in S}|u(t) - v(t)| \leqslant |\sup_{t\in S} u(t) - \sup_{t\in S} v(t)| - \varepsilon\,.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sup_{t\in S} v(t) \leqslant \sup_{t\in S} u(t)$. Tada za svaki $s \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned} u(s) - \sup_{t\in S} v(t) &\leqslant u(s) - v(s) \leqslant |u(s) - v(s)| \\ &\leqslant \sup_{t\in S}|u(t) - v(t)| \leqslant \sup_{t\in S} u(t) - \sup_{t\in S} v(t) - \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $s \in S$ vrijedi

$$u(s) \leqslant \sup_{t\in S} u(t) - \varepsilon\,,$$

što je u kontradikciji s definicijom supremuma. Time je (4) dokazano.

No sada, ako je $\varepsilon > 0$, stavimo $\delta := \varepsilon$. Ako za $u, v \in \mathrm{B}(S;\mathbb{R})$ vrijedi $\|u - v\|_{\mathrm{B}(S;\mathbb{R})} < \delta$, onda je

$$|\sup_{t\in S} u(t) - \sup_{t\in S} v(t)| \leqslant \sup_{t\in S}|u(t) - v(t)| = \|u - v\|_{\mathrm{B}(S;\mathbb{R})} < \delta = \varepsilon\,.$$

Dakle, zadano preslikavanje je neprekidno na $\mathrm{B}(S;\mathbb{R})$. □

4. Ako je X topološki prostor (na primjer, metrički prostor), a E normiran, prirodno je proučavati skup $\mathrm{C}(X;E)$, svih neprekidnih funkcija s X u E. Posebno gledamo $\mathrm{C}_b(X;E) := \mathrm{C}(X;E) \cap \mathrm{B}(X;E)$.

Pokazati da je $\mathrm{C}_b(X;E)$ zatvoren potprostor $\mathrm{B}(X;E)$, s naslijeđenom normom. Drugim riječima, uniformni limes ograničenih i neprekinutih funkcija je ponovo takva. Ako je E potpun, onda je to i $\mathrm{C}_b(X;E)$; a ako je X kompaktan, onda je $\mathrm{C}(X;E) = \mathrm{C}_b(X;E)$.

Rješenje. Ako su λ, μ dva skalara i $u, v \in \mathrm{C}_b(X;E)$, potrebno je pokazati da je $\lambda u + \mu v \in \mathrm{C}_b(X;E)$. U slučaju da je neki od skalara 0, odgovarajući pribrojnik se jednostavno makne i argumentacija se pojednostavnjuje pa pretpostavimo da su oba različita od 0.

Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Tada postoje okoline U i V oko x_0 takve da vrijedi

$$\begin{aligned} x \in U \ &\Rightarrow\ \|u(x) - u(x_0)\|_E < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\,, \\ x \in V \ &\Rightarrow\ \|v(x) - v(x_0)\|_E < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}\,. \end{aligned}$$

Tada je $W = U \cap V$ okolina oko x_0 takva da $x \in W$ povlači

$$\begin{aligned} \|(\lambda u + \mu v)(x) - (\lambda u + \mu v)(x_0)\|_E &= \|\lambda(u(x) - u(x_0)) + \mu(v(x) - v(x_0))\|_E \\ &\leqslant |\lambda|\|u(x) - u(x_0)\|_E + |\mu|\|v(x) - v(x_0)\|_E \\ &< \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dakle, $\lambda u + \mu v$ je neprekidna pa je $\mathrm{C}_b(X;E)$ doista potprostor od $\mathrm{B}(X;E)$.

Nadalje, neka je $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathrm{C}_b(X;E)$ koji uniformno konvergira prema funkciji $u \in \mathrm{B}(X;E)$. Moramo pokazati da je tada $u \in \mathrm{C}_b(X;E)$, tj. da je u neprekidna funkcija.

Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Prvo iz činjenice da je $u = \lim_n u_n$ zaključujemo

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \|u_n - u\|_{\mathrm{B}(S;E)} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Nadalje, iz činjenice da je u_{n_0} neprekidna u x_0 slijedi da postoji okolina U oko x_0 takva da

$$x \in U \ \Rightarrow\ \|u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)\|_E < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Stoga za $x \in U$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(x_0)\|_E &\leqslant \|u(x) - u_{n_0}(x)\|_E + \|u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)\|_E + \|u_{n_0}(x_0) - u(x_0)\|_E \\ &\leqslant \|u - u_{n_0}\|_{\mathrm{B}(X;E)} + \|u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)\|_E + \|u_{n_0} - u\|_{\mathrm{B}(X;E)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dakle, u je neprekidna pa je $u \in \mathrm{C}_b(X;E)$, tj. $\mathrm{C}_b(X;E)$ je zatvoren potprostor od $\mathrm{B}(X;E)$.

Ako je E potpun, onda je prema jednom od prethodnih zadataka $\mathrm{B}(X;E)$ potpun. Stoga proizvoljan Cauchyjev niz iz $\mathrm{C}_b(X;E)$ konvergira u $\mathrm{B}(X;E)$. Vidjeli smo da je limes tog niza neprekidna funkcija pa dotični niz konvergira u $\mathrm{C}_b(X;E)$. Dakle, $\mathrm{C}_b(X;E)$ je potpun.

Na kraju, pretpostavimo da je X kompaktan. Dokazat ćemo da je tada $\mathrm{C}(X;E) \subseteq \mathrm{B}(X;E)$, što je ekvivalentno s $\mathrm{C}_b(X;E) = \mathrm{C}(X;E)$.

Neka je $u \in \mathrm{C}(X;E)$. Tada oko svakog $x \in X$ postoji otvorena okolina U_x takva da

$$y \in U_x \ \Rightarrow\ \|u(y) - u(x)\|_E < 1\,.$$

Familija $\{U_x \mid x \in X\}$ očito čini otvoreni pokrivač prostora X pa se zbog kompaktnosti može reducirati na konačan potpokrivač. Dakle, postoje $x_0, \dots, x_n \in X$ takvi da je $\{U_{x_0}, \dots, U_{x_n}\}$ pokrivač prostora X. Označimo s $M := \max\{\|u(x_0)\|_E, \dots, \|u(x_n)\|_E\}$.

Za $x \in X$ postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $x \in U_{x_i}$. Tada vrijedi

$$\|u(x)\|_E \leqslant \|u(x) - u(x_i)\|_E + \|u(x_i)\|_E < 1 + M\,.$$

Stoga je funkcija u omeđena, tj. $u \in \mathrm{B}(X; E)$. □

5. Ako je X kompaktan metrizabilan prostor, pokazati da je $\mathrm{C}(X; \mathbb{R})$ separabilan prostor.

Rješenje. Rješenje ovog zadatka napravljeno je prema uputama iz [1, str. 264, zad. 17].

Budući da je X kompaktan metrizabilan, slijedi da je separabilan. Neka je d metrika koja inducira topologiju na X, a D neka je gust prebrojiv podskup. Za svaki $a \in D$ i svaki par racionalnih brojeva $0 < q_1 < q_2$ iz Urysohnove leme [2, str. 102] slijedi da postoji neprekidna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ takva da je

$$(\forall x \in K[a, q_1])\ f(x) = 1, \qquad (\forall x \in X \backslash K(a, q_2))\ f(x) = 0\,.$$

Time smo dobili prebrojiv skup neprekidnih funkcija $A \subseteq \mathrm{C}(X; \mathbb{R})$.

Lako se vidi da skup A razdvaja točke prostora X. Naime, za različite $x, x' \in X$ lako odaberemo točke $a \in D$ i brojeve q_1, q_2 tako da je $x \in K[a, q_1]$ i $x' \in X \backslash K(a, q_2)$. Za pripadnu funkciju f je onda $f(x) = 1$, a $f(x') = 0$.

Neka je B najmanja podalgebra od $\mathrm{C}(X; \mathbb{R})$ koja sadrži $A \cup \{\mathbf{1}\}$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu, $\mathsf{Cl}\, B = \mathrm{C}(X; \mathbb{R})$.

Ako promotrimo koji elementi čine skup B, uočit ćemo da je

$$B = \{q(f_1, \dots, f_n) \mid n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], f_1, \dots, f_n \in A \cup \{\mathbf{1}\}\}\,.$$

Naime, skup s desne strane evidentno je podskup svake algebre koja sadrži $A \cup \{\mathbf{1}\}$, a i sam je algebra koja sadrži $A \cup \{\mathbf{1}\}$.

Ograničavanjem na polinome s racionalnim koeficijentima dobivamo prebrojiv skup

$$C = \{q(f_1, \dots, f_n) \mid n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n], f_1, \dots, f_n \in A \cup \{\mathbf{1}\}\}\,.$$

C je gust u B pa je gust i u $\mathrm{C}(X; \mathbb{R})$. Slijedi da je $\mathrm{C}(X; \mathbb{R})$ separabilan. □

6. Ako su X i Y kompaktni Hausdorffovi prostori, pokazati da se neprekinuta funkcija na $X \times Y$ može jednoliko aproksimirati funkcijama oblika $\sum_{i=1}^n f_i \boxtimes g_i$, gdje su f_i neprekinute na X, a g_i neprekinute na Y.

[Tenzorski produkt se definira formulom $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(x)$.]

Rješenje. Označimo s $A := \{\sum_{i=1}^n f_i \boxtimes g_i \mid n \in \mathbb{N}, f_i \in \mathrm{C}(X; \mathbb{R}), g_i \in \mathrm{C}(Y; \mathbb{R})\}$. Pokazat ćemo da je A podalgebra algebre $\mathrm{C}(X \times Y; \mathbb{R})$ koja zadovoljava uvjete Stone-Weierstrassovog teorema.

Prvo primijetimo da za $f \in \mathrm{C}(X; \mathbb{R}), g \in \mathrm{C}(Y; \mathbb{R})$ vrijedi

$$f \boxtimes g = (f \circ \pi_X)(g \circ \pi_Y)\,,$$

pri čemu su $\pi_X\colon X \times Y \to X$ i $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ projekcije. Stoga je $f \boxtimes g$ neprekidna funkcija, kao produkt neprekidnih funkcija. Slijedi $A \subseteq \mathrm{C}(X \times Y; \mathbb{R})$.

Nadalje, očito je A zatvoren na zbrajanje funkcija. Zatvorenost na skalarno množenje slijedi iz činjenice da za $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R}), g \in \mathrm{C}(Y;\mathbb{R})$ vrijedi

$$\lambda(f \boxtimes g) = (\lambda f) \boxtimes g = f \boxtimes (\lambda g)\,,$$

a pritom je $\lambda f \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R})$ i $\lambda g \in \mathrm{C}(Y;\mathbb{R})$. Konačno, zatvorenost na množenje slijedi iz također jednostavne činjenice da za $f, f' \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R}), g, g' \in \mathrm{C}(Y;\mathbb{R})$ vrijedi

$$(f \boxtimes g)(f' \boxtimes g') = (ff') \boxtimes (gg')\,,$$

a pritom je $ff' \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R})$ i $gg' \in \mathrm{C}(Y;\mathbb{R})$. Dakle, A je podalgebra algebre $\mathrm{C}(X \times Y;\mathbb{R})$.

Očito se sve konstantne funkcije nalaze u A. Ostaje još pokazati da A razdvaja točke. Da bismo to dobili, pokažimo prvo da su prostori X i Y normalni.

Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup i $x \in X\backslash F$. Zbog toga što je X Hausdorffov, za svaki $y \in F$ postoje disjunktne otvorene okoline U_y oko y i V_y oko x. Skup $\{U_y \mid y \in F\} \cup \{X\backslash F\}$ čini otvoreni pokrivač prostora X koji se zbog kompaktnosti reducira na konačan potpokrivač $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}, X\backslash F\}$. Tada je $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ otvoren pokrivač skupa F. Stavimo

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}\,, \qquad V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}\,.$$

Tada su U i V disjunktni otvoreni skupovi takvi da je $F \subseteq U$ i $x \in V$.

Neka su sada $E, F \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Za svaki $x \in E$ postoje disjunktne otvorene okoline U_x oko x i V_x oko F. Opet zaključimo da postoje $x_1, \dots, x_m \in E$ za koje je $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ pokrivač skupa E. Tada su skupovi

$$U := \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\,, \qquad V := \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}\,,$$

disjunktni otvoreni skupovi koji razdvajaju E i F. Dakle, X je normalan prostor, a analogno i Y.

Neka su sad $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ različite točke. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \neq x'$. Budući da su u Hausdorffovom prostoru jednočlani skupovi $\{x\}$ i $\{x'\}$ zatvoreni, iz Urysohnove leme [2, str. 102] slijedi da postoji neprekidna funkcija $f \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R})$ takva da je $f(x) = 0, f(x') = 1$. Sada za konstantu $\mathbf{1} \in \mathrm{C}(Y;\mathbb{R})$ imamo $f \boxtimes \mathbf{1} \in A$ i

$$(f \boxtimes \mathbf{1})(x, y) = 0 \;\neq\; (f \boxtimes \mathbf{1})(x', y') = 1\,.$$

Dakle, A doista razdvaja točke.

Primjenom Stone-Weierstrassovog teorema aproksimacije zaključujemo da je podalgebra A gusta u $\mathrm{C}(X \times Y;\mathbb{R})$, što povlači tvrdnju zadatka. $\square$

7.* (**Riemannov integral na segmentu**)

8.* (**Riemannov integral na kvadru u $\mathbb{R}^d$**)

9. (**Riemann-Stieltjesov integral na segmentu**) Jedno moguće poopćenje Riemannovog integrala je Riemann-Stieltjesov integral. Radi jednostavnosti, definiramo ga na omeđenom segmentu $I = [a, b]$ u $\mathbb{R}$. Pritom koristimo oznake uvedene u Zadatku 7; posebno, s $\mathcal{C}_\rho$ označujemo skup svih funkcija izbora za danu podjelu ρ.

Neka su f i g realne funkcije na I. Funkcija f je *Riemann-Stieltjes-integrabilna na I s obzirom na g* ako postoji $\xi \in \mathbb{R}$ (vrijednost integrala) takav da vrijedi (s n označimo broj elemenata u podjeli ρ)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \rho \in \mathcal{P})(\forall c \in \mathcal{C}_\rho)$$
$$\sup_{k \in 1..n} |x_k - x_{k-1}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |R_{f|g}(\rho, c) - \xi| < \varepsilon\,,$$

pri čemu je Riemann-Stieltjesova suma definirana s

$$R_{f|g}(\rho, c) := \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)\,.$$

Očigledno jednoznačno određen broj ξ tada označujemo s $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Pokazati da vrijede sljedeće tvrdnje:

a) Riemann-Stieltjes-integrabilne funkcije s obzirom na g čine vektorski prostor, te je Riemann-Stieltjesov integral linearan funkcional; točnije ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) vrijedi:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dg(x) = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dg(x)\,.$$

Rješenje. Neka su f_1, f_2 Riemann-Stieltjes-integrabilne funkcije s obzirom na g i neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ različiti od 0 (ako je jedan ili su oba jednaki 0, argumentacija je analogna i jednostavnija). Označimo s $F_1 := \int_a^b f_1(x)dg(x)$ i $F_2 := \int_a^b f_2(x)dg(x)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ tako da vrijedi

$$(\forall \rho \in \mathcal{P})(\forall c \in \mathcal{C}_\rho) \quad \sup_{k \in 1..n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |R_{f_1|g}(\rho, c) - F_1| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_1|}\,,$$
$$\sup_{k \in 1..n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |R_{f_2|g}(\rho, c) - F_2| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_2|}\,.$$

Trivijalno je za pokazati da je

$$R_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|g}(\rho, c) = \lambda_1 R_{f_1|g}(\rho, c) + \lambda_2 R_{f_2|g}(\rho, c)\,.$$

Zato za $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, razdiobu $\rho \in \mathcal{P}$ s očicom manjom od δ te $c \in \mathcal{C}_\rho$ vrijedi

$$\begin{aligned}|R_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|g}(\rho, c) - (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)| &= |\lambda_1(R_{f_1|g}(\rho, c) - F_1) + \lambda_2(R_{f_2|g}(\rho, c) - F_2)| \\ &\leqslant |\lambda_1||R_{f_1|g}(\rho, c) - F_1| + |\lambda_2||R_{f_2|g}(\rho, c) - F_2| \\ &< \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. □

b) Ako je f Riemann-Stieltjes-integrabilna i s obzirom na g_1, i s obzirom na g_2, onda je f Riemann-Stieltjes-integrabilna i s obzirom na $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, te vrijedi:

$$\int_a^b f(x)d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) = \lambda_1 \int_a^b f(x)dg_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f(x)g_2(x)\,.$$

Rješenje. Dokaz je potpuno analogan kao u prethodnom podzadatku. Ključno je uočiti da vrijedi

$$R_{f|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2}(\rho, c) = \lambda_1 R_{f|g_1}(\rho, c) + \lambda_2 R_{f|g_2}(\rho, c)\,.$$

□

c) Ako je $t \in \langle a, b\rangle$, te donji integrali postoje, onda vrijedi aditivnost po području integracije

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^t f(x)dg(x) + \int_t^b f(x)dg(x)\,.$$

Zapravo, iz postojanja integrala s lijeva slijedi i postojanje oba integrala zdesna. Pokazati primjerom da integral s lijeva ne mora postojati ako postoje oba integrala zdesna.

Rješenje. Pretpostavimo da postoje integrali $F := \int_a^b f(x)dg(x)$ i $F_1 := \int_a^t f(x)dg(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $\delta, \delta_1 > 0$ takvi da za sve razdiobe ρ segmenta $[a, b]$ očice manje od δ, razdiobe ρ_1 segmenta $[a, t]$ očice manje od δ_1 i funkcije izbora $c \in \mathcal{C}_\rho$ te $c_1 \in \mathcal{C}_{\rho_1}$ vrijedi

$$|R_{f|g}(\rho, c) - F| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad |R_{f|g}(\rho_1, c_1) - F_1| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stavimo $\delta_2 := \min\{\delta, \delta_1\}$ i uzmimo proizvoljnu razdiobu ρ_2 segmenta $[t, b]$ očice manje od δ_2. Nadalje, uzmimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n < \delta_2$ i neka je ρ_1 ekvidistantna razdioba segmenta $[a, t]$ s n podsegmenata. Kombiniranjem ρ_1 i ρ_2 dobivamo razdiobu ρ čitavog segmenta $[a, b]$ očice manje od δ_2.

Odaberimo proizvoljne funkcije izbora $c_1 \in \mathcal{C}_{\rho_1}$ i $c_2 \in \mathcal{C}_{\rho_2}$. Tada je $c := c_1 \cup c_2 \in \mathcal{C}_\rho$.

Evidentno je da vrijedi

$$R_{f|g}(\rho, c) = R_{f|g}(\rho_1, c_1) + R_{f|g}(\rho_2, c_2)\,.$$

Stoga možemo zaključiti

$$\begin{aligned}
|R_{f|g}(\rho_2, c_2) - F + F_1| &= |R_{f|g}(\rho, c) - R_{f|g}(\rho_1, c_1) - F + F_1| \\
&\leqslant |R_{f|g}(\rho, c) - F| + |R_{f|g}(\rho_1, c_1) - F_1| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Postoji, dakle, $\int_t^b f(x)dg(x)$ i jednak je $\int_a^b f(x)dg(x) - \int_a^t f(x)dg(x)$.

Pokažimo da integral slijeva ne mora postojati ako postoje oba integrala zdesna. Funkcije f i g možemo na segmentu $[-1, 1]$ definirati na sljedeći način:

$$f(x) := \begin{cases} -1/x, & x \in [-1, 0\rangle, \\ 1, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0], \\ 1/x, & x \in \langle 0, 1]. \end{cases}$$

Lako se vidi da je $\int_{-1}^0 f(x)dg(x) = 0$ i $\int_0^1 f(x)dg(x) = 0$. Međutim, promotrimo niz razdioba $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čitavog segmenta $[-1, 1]$ dan s

$$\rho_n := \left(-1, -\frac{n-1}{n}, \ldots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Ako n teži u beskonačnost, očica razdiobe ρ_n teži u nulu. Pogledajmo što se dogodi s pripadnom Riemann-Stieltjesovom ako odaberemo pogodne funkcije izbora $c_n \in \mathcal{C}_{\rho_n}$. Neka c_n podsegmentu razdiobe pridruži njegov lijevi rub. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{f|g}(\rho_n, c_n) &= f(-1/n)(g(1/n) - g(-1/n)) + g(1) - g(1/n) \\
&= n(n-1) + 1 - n = (n-1)^2\,.
\end{aligned}$$

Stoga za svaki $\delta > 0$ postoji po volji velika suma za razdiobu s očicom manjom od δ. Integral onda očito ne postoji.

[TODO: Pokazati da iz postojanja integrala slijeva slijedi postojanje oba integrala zdesna.]

□

d) (**parcijalna integracija**) Ako postoji jedan od integrala niže, onda postoji i drugi, te vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)\,.$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da postoji $F := \int_a^b f(x)dg(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaku razdiobu s očicom manjom od δ i svaku pripadnu funkciju izbora vrijedi uvjet iz definicije integrala F.

Neka je $\delta' := \delta/2$, $\rho \in \mathcal{P}$ proizvoljna razdioba očice manje od δ' i $c \in \mathcal{C}_\rho$ proizvoljna pripadna funkcija izbora. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{g|f}(\rho, c) &= \sum_{k=1}^{n} g(\tilde{x}_k)\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(\tilde{x}_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(\tilde{x}_k)f(x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} g(\tilde{x}_k)f(x_k) + g(\tilde{x}_n)f(b) - g(\tilde{x}_1)f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} g(\tilde{x}_{k+1})f(x_k) \\
&= -\Big(f(a)\big(g(\tilde{x}_1) - g(a)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\big(g(\tilde{x}_{k+1}) - g(\tilde{x}_k)\big) + f(b)\big(g(b) - g(\tilde{x}_n)\big)\Big) \\
&\quad - f(a)g(a) + f(b)g(b) \\
&= -R_{f|g}(\rho', c') - f(a)g(a) + f(b)g(b)\,,
\end{aligned}$$

pri čemu je razdioba $\rho' = (a, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, b)$, a c' pripadna funkcija izbora za koju vrijedi $c'([a, \tilde{x}_1]) = a$, $c'([\tilde{x}_n, b]) = b$ i $c'([\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}]) = x_k$ za $1 \leqslant k < n$.

Primijetimo da je $\tilde{x}_1 - a \leqslant x_1 - a < \delta$, $b - \tilde{x}_n \leqslant b - x_{n-1} < \delta$ te da za svaki k, $1 \leqslant k < n$ vrijedi

$$\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k \leqslant x_{k+1} - x_{k-1} = (x_{k+1} - x_k) + (x_k - x_{k-1}) < \delta' + \delta' = \delta\,.$$

Stoga je ρ' razdioba s očicom manjom od δ pa ako stavimo $G := f(b)g(b) - f(a)g(a) - F$, vrijedi

$$\begin{aligned}
|R_{g|f}(\rho, c) - G| &= |-R_{f|g}(\rho', c') - f(a)g(a) + f(b)g(b) - f(b)g(b) + f(a)g(a) + F| \\
&= |R_{f|g}(\rho', c') - F| < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Postoji, dakle, $\int_a^b g(x)df(x)$ i jednak je $f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)dg(x)$. □

e) Ako je f Riemann-integrabilna, a g neprekinuto diferencijabilna na I, onda je f i Riemann-Stieltjes-integrabilna s obzirom na g, te vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx\,.$$

[Naputak: Primijeniti Lagrangeevu formulu i iskoristiti jednoliku neprekinutost g'.]

Rješenje. S obzirom da je g' neprekinuta, funkcija fg' je Riemann-integrabilna pa postoji $F := \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $\delta_1 > 0$ tako da za svaku razdiobu ρ očice manje od δ_1 i funkciju izbora $c \in \mathcal{C}_\rho$ vrijedi

$$|R_{fg'}(\rho, c) - F| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Budući da je f Riemann-integrabilna, ona je i omeđena, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za $x \in I$. Funkcija g' je neprekinuta na kompaktu pa je jednoliko neprekinuta. Stoga postoji $\delta_2 > 0$ tako da

$$|x - y| < \delta_2 \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\,.$$

Uzmimo sada $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ i neka su razdioba $\rho = (x_0, \dots, x_n)$ očice manje od δ i funkcija izbora $c \in \mathcal{C}_\rho$ proizvoljne. Kako je g neprekidno diferencijabilna, za svaki segment $[x_{k-1}, x_k]$ iz razdiobe ρ prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\bar{x}_k \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$ takav da je $g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
|R_{f|g}(\rho, c) - F| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) - F\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k) g'(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) - R_{fg'}(\rho, c) + R_{fg'}(\rho, c) - F\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\tilde{x}_k)||g'(\bar{x}_k) - g'(\tilde{x}_k)|(x_k - x_{k-1}) + |R_{fg'}(\rho, c) - F| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je f Riemann-Stieltjes-integrabilna s obzirom na g i da vrijedi

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx\,.$$

□

10.*

11. (**Dinijeve derivacije**) Derivaciju funkcije f realne varijable definiramo kao limes:

$$Df(x) := f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Takva derivacija ne mora biti definirana za svaku funkciju u svakoj točki. Međutim, sljedeća četiri limesa (*Dinijeve derivacije*) uvijek postoje u $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
D^{\pm} f(x) &:= \limsup_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
D_{\pm} f(x) &:= \liminf_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.
\end{aligned}$$

Ukoliko je $D^+ f(x) = D_+ f(x)$, onda kažemo da f ima derivaciju zdesna u točki x, koju označujemo s $f'_+(x)$; slično i za $D^- f(x) = D_- f(x)$, za derivaciju slijeva.

Pokazati da funkcija f ima derivaciju u točki x ako i samo ako je $f'_+(x) = f'_-(x)$.

Rješenje. Pretpostavimo prvo da funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}$, pri čemu je $S \subseteq \mathbb{R}$, ima derivaciju u točki $x \in S$. Ako bi postojao $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\sup_{\substack{h \in \langle 0, \delta \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < f'(x)\,,$$

postojao bi $\varepsilon > 0$ takav da

$$h \in \langle 0, \delta \rangle, x+h \in S \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant f'(x) - \varepsilon\,.$$

S druge strane, za dotični ε postoji $\delta' > 0$ tako da vrijedi

$$h \in \langle 0, \delta' \rangle, x+h \in S \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon\,,$$

što vodi u kontradikciju. Prema tome, za svaki $\delta > 0$ je

$$f'(x) \leqslant \sup_{\substack{h \in \langle 0, \delta \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

a onda je i

$$f'(x) \leqslant \inf_{\delta > 0} \sup_{\substack{h \in \langle 0, \delta \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D^+ f(x)\,.$$

Nadalje, pretpostavimo da je $f'(x) < D^+ f(x)$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve $\delta > 0$ vrijedi

$$f'(x) + \varepsilon < \sup_{\substack{h \in \langle 0, \delta \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Postoji, dakle, $h \in \langle 0, \delta \rangle$ takav da je $x + h \in S$ i

$$f'(x) + \varepsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Time smo dokazali da je $D^+ f(x) = f'(x)$. Analogno se pokaže i da je $D^- f(x) = D_+ f(x) = D_- f(x) = f'(x)$ pa vrijedi $f'_+(x) = f'_-(x)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $f'_+(x) = f'_-(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $\delta^+, \delta^-, \delta_+, \delta_- > 0$ takvi da vrijedi

$$\sup_{\substack{h \in \langle -\delta^-, 0 \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \alpha + \varepsilon\,, \qquad \sup_{\substack{h \in \langle 0, \delta^+ \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \alpha + \varepsilon\,,$$

$$\inf_{\substack{h \in \langle -\delta_-, 0 \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \alpha - \varepsilon\,, \qquad \inf_{\substack{h \in \langle 0, \delta_+ \rangle \\ x+h \in S}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \alpha - \varepsilon\,.$$

Stoga za $\delta := \min\{\delta^+, \delta^-, \delta_+, \delta_-\}$ vrijedi

$$h \in \langle -\delta, \delta\rangle \backslash \{0\}, x+h \in S \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \alpha\right| < \varepsilon\,,$$

tj. postoji $f'(x)$ i jednaka je α.

[TODO: Što ako je $f'_+(x) = f'_-(x) = \pm\infty$? Može li uopće nastati takva situacija?] □

12. (**Poluneprekinute funkcije**)

a) Ako su $f_\alpha \in \mathrm{C}^-(X)$, za $\alpha \in A$, onda je i $f := \sup_{\alpha\in A} f_\alpha \in \mathrm{C}^-(X)$. Analogna tvrdnja vrijedi i za infimum odozgo poluneprekinutih funkcija.

Rješenje. Da bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je dokazati da za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f^{\leftarrow}(\langle a, \infty]) = \bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha^{\leftarrow}(\langle a, \infty])\,.$$

Naime, tada je $f^{\leftarrow}(\langle a, \infty])$ unija otvorenih skupova pa je i sam otvoren.

Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada je $x \in f^{\leftarrow}(\langle a, \infty])$ ekvivalentno s $a < f(x)$. Uočimo da je $f(x) = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$. Stoga je $a < f(x)$ ekvivalentno s time da postoji $\alpha \in A$ takav da je $a < f_\alpha(x)$. No, ovo zadnje je ekvivalentno s time da postoji $\alpha \in A$ takav da je $x \in f_\alpha^{\leftarrow}(\langle a, \infty])$, tj. da je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha^{\leftarrow}(\langle a, \infty])$. □

b) Svaka neprekidna funkcija je i odozdo i odozgo poluneprekinuta; po tvrdnji (a) je tada i supremum neprekinutih funkcija odozdo poluneprekinuta funkcija. Može se pokazati protuprimjerom da taj supremum ne mora biti i neprekinuta funkcija.

Rješenje. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}^+$ definiramo funkciju $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ s $f_\alpha(x) := \alpha x$. Očito su funkcije f_α neprekinute. Međutim, za $f := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^+} f_\alpha$ vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0\,, \\ \infty, & x > 0\,. \end{cases}$$

Naime, ako je $x \leqslant 0$, onda za svaki $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vrijedi $\alpha x \leqslant 0$ te za svaki $y < 0$ postoji $\alpha \in \mathbb{R}^+$ takav da je $y < \alpha x$. Ako su pak $x, y > 0$, onda postoji $\alpha \in \mathbb{R}^+$ za koji je $\alpha x > y$.

Očito f nije neprekinuta. Primjerice, $f^{\leftarrow}([-\infty, 1\rangle) = \langle -\infty, 0]$, što nije otvoren skup u $\mathbb{R}$. □

c) Karakteristična funkcija skupa je odozdo (odozgo) poluneprekinuta ako i samo ako je taj skup otvoren (zatvoren).

Rješenje. Pretpostavimo da je $\chi_A\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, karakteristična funkcija skupa $A \subseteq X$, odozdo poluneprekinuta. Tada je $A = \chi_A^{\leftarrow}(\langle 1/2, \infty])$ otvoren skup. Ukoliko je χ_A odozgo poluneprekinuta, skup $X \backslash A = \chi_A^{\leftarrow}([-\infty, 1/2\rangle)$ je otvoren pa je A zatvoren.

Obrnuto, neka je A otvoren i $a \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\chi_A^{\leftarrow}(\langle a, \infty]) = \begin{cases} \varnothing, & a \geqslant 1\,, \\ A, & a \in [0, 1\rangle\,, \\ X, & a < 0\,. \end{cases}$$

Dakle, $\chi_A^{\leftarrow}(\langle a,\infty])$ je u svakom slučaju otvoren skup pa je χ_A odozdo poluneprekinuta.

Ako je pak A zatvoren, tj. $X\backslash A$ otvoren te $a\in\mathbb{R}$, vrijedi

$$\chi_A^{\leftarrow}([-\infty,a\rangle) = \begin{cases} X, & a>1\,,\\ X\backslash A, & a\in\langle 0,1]\,,\\ \varnothing, & a\leqslant 0\,. \end{cases}$$

Dakle, $\chi_A^{\leftarrow}([-\infty,a\rangle)$ je u svakom slučaju otvoren skup pa je χ_A odozgo poluneprekinuta. □

d) Ako je X metrizabilan prostor, a $I:=[a,b]$ segment u $\overline{\mathbb{R}}$ (uključivo i čitav skup $\overline{\mathbb{R}}$), onda je svaka odozdo poluneprekinuta funkcija $f\in \mathrm{C}^-(X;I)$ supremum rastućeg niza neprekinutih funkcija s X u I.

Rješenje. □

e) Neka je I ograničen segment. Za funkciju $x\in \mathrm{C}^1(I)$ definirajmo

$$J(x) := \int_I \sqrt{1+\dot{x}^2}dt\,.$$

Tada je $J\in \mathrm{C}^-(\mathrm{C}^1(I);\mathbb{R})$. Pritom je norma na $\mathrm{C}^1(I)$ definirana s

$$\|x\|_{\mathrm{C}^1(I)} := \sup_t|x(t)| + \sup_t|\dot{x}(t)|\,.$$

Rješenje. Dokazat ćemo i više: $J\colon \mathrm{C}^1(I)\to\mathbb{R}$ je neprekinuta funkcija.

Neka je $I=[a,b]$ za $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Neka su $x_0\in \mathrm{C}^1(I)$ i $\varepsilon>0$ proizvoljni. Stavimo $\delta:=\varepsilon/(b-a)$. Tada za $x\in \mathrm{C}^1(I)$ takav da je $\|x-x_0\|<\delta$ vrijedi

$$\begin{aligned}|J(x)-J(x_0)| &= \left|\int_I\Big(\sqrt{1+\dot{x}^2}-\sqrt{1+\dot{x}_0{}^2}\Big)dt\right| \leqslant \int_I\left|\sqrt{1+\dot{x}^2}-\sqrt{1+\dot{x}_0{}^2}\right|dt\\ &= \left|\sqrt{1+\dot{x}^2(c)}-\sqrt{1+\dot{x}_0{}^2(c)}\right|(b-a)\\ &= \frac{|\dot{x}(c)-\dot{x}_0(c)||\dot{x}(c)+\dot{x}_0(c)|}{\sqrt{1+\dot{x}^2(c)}+\sqrt{1+\dot{x}_0{}^2(c)}}(b-a)\,,\end{aligned}$$

za neki $c\in[a,b]$ (prema teoremu srednje vrijednosti za Riemannov integral). Sada iskoristimo sljedeću nejednakost:

$$|\dot{x}(c)+\dot{x}_0(c)| \leqslant |\dot{x}(c)|+|\dot{x}_0(c)| < \sqrt{1+\dot{x}^2(c)}+\sqrt{1+\dot{x}_0{}^2(c)}\,.$$

Zaključujemo da je

$$\begin{aligned}|J(x)-J(x_0)| &< |\dot{x}(c)-\dot{x}_0(c)|(b-a) \leqslant \sup_t|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|(b-a)\\ &\leqslant \|x-x_0\|(b-a) < \delta(b-a)=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Prema tome, J je neprekinuta funkcija, a onda i odozdo poluneprekinuta. □

f) Ako je $F\colon \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, onda je funkcija

$$f(x) := \sup_{U \in \mathcal{U}_x} F(U)$$

odozdo poluneprekinuta, pri čemu je s $\mathcal{U}_x$ označena familija (filtar) svih okolina točke x. Analogna tvrdnja vrijedi i za infimume i odozgo poluneprekinute funkcije.

[Naputak: Treba pokazati da je za svaki $\xi \in \mathbb{R}$ skup $f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$ otvoren. Uzmimo $x_0 \in f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$, to jest $\xi < f(x_0)$. Po definiciji f vrijedi $(\exists U \in \mathcal{U}_{x_0})\ \xi < F(U)$, odakle slijedi $(\forall y \in \operatorname{Int} U)\ f(y) \geqslant F(U) > \xi$, pa je $\operatorname{Int} U \subseteq f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$, čime je tvrdnja pokazana.]

Rješenje. Rješenje je zapravo u potpunosti dano u naputku. □

g) Ako je X metrizabilan prostor (dovoljno je da zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti), onda je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ odozdo poluneprekinuta ako i samo ako za svaku točku $x \in X$ i svaki niz $x_n \longrightarrow x$ vrijedi:

$$f(x) \leqslant \liminf_n f(x_n)\,.$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za odozgo poluneprekinute funkcije, te limes superior. U općenitim topološkim prostorima takva karakterizacija vrijedi ako nizove zamijenimo hipernizovima. Ukoliko u takvim prostorima koristimo samo nizove, onda je na gornji način definirana *nizovna poluneprekinutost odozdo.*

Rješenje. Dokažimo tvrdnju u najvećoj općenitosti — iskazanu pomoću hipernizova.

Pretpostavimo prvo da postoji točka $x \in X$ i hiperniz $x_\lambda \to x$ takvi da je

$$\liminf_\lambda f(x_\lambda) = \sup_\mu \inf_{\lambda \succcurlyeq \mu} f(x_\lambda) < f(x)\,.$$

Tada postoji $\xi \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\mu \in \Lambda$ vrijedi

$$\inf_{\lambda \succcurlyeq \mu} f(x_\lambda) < \xi < f(x)\,. \tag{5}$$

Evidentno je $x \in f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$. Pokazat ćemo da je x na rubu tog skupa, pa onda on ne može biti otvoren.

Neka je $U \in \mathcal{U}_x$ okolina točke x. Zbog konvergencije hiperniza (x_λ), postoji $\mu_0 \in \Lambda$ takav da za $\lambda \succcurlyeq \mu_0$ vrijedi $x_\lambda \in U$. Međutim, iz (5) slijedi da postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ za koji je $\lambda_0 \succcurlyeq \mu_0$ te stoga $x_{\lambda_0} \in U$, i $f(x_{\lambda_0}) < \xi$ te stoga $x_{\lambda_0} \notin f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$. Dakle, svaka okolina točke x siječe komplement skupa $f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$ pa on nije otvoren. No onda funkcija f nije odozdo poluneprekinuta.

Obratno, pretpostavimo da f nije odozdo poluneprekinuta. Tada postoji $\xi \in \mathbb{R}$ takav da $f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$ nije otvoren skup. No onda postoji $x \in X$ na rubu skupa $f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$. Sada na prirodan način shvatimo $\mathcal{U}_x$, sustav okolina točke x, kao usmjeren skup i pridružimo svakoj okolini U točku $x_U \notin f^{\leftarrow}\langle \xi, \infty]$. Na taj način smo definirali hiperniz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ koji konvergira prema x. Jasno je da vrijedi

$$\liminf_U f(x_U) \leqslant \xi < f(x)\,.$$

□

h) Odozdo (odozgo) poluneprekinuta funkcija na kompaktu poprima svoj minimum (maksimum).

Rješenje. Pretpostavimo da je X kompaktan topološki prostor te $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ odozdo poluneprekinuta funkcija. Pretpostavimo suprotno, da f ne poprima svoj minimum. Tada za svaki $x \in X$ postoji $y \in X$ takav da je $f(y) < f(x)$, tj. $x \in f^{\leftarrow}\langle f(y), \infty]$. Stoga skup

$$\{f^{\leftarrow}\langle f(x), \infty] \mid x \in X\}$$

čini otvoreni pokrivač prostora X koji se zbog kompaktnosti reducira na konačan potpokrivač

$$\{f^{\leftarrow}\langle f(x_1), \infty], \ldots, f^{\leftarrow}\langle f(x_n), \infty]\}\,.$$

Neka je $m \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $f(x_m) = \min\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$. Za proizvoljan $x \in X$ postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ za koji je $x \in f^{\leftarrow}\langle f(x_i), \infty]$ pa vrijedi $f(x_m) \leqslant f(x_i) < f(x)$, tj. $x \in f^{\leftarrow}\langle f(x_m), \infty]$. Stoga vidimo da je $X = f^{\leftarrow}\langle f(x_m), \infty]$.

No to je kontradikcija jer vrijedi $x_m \in f^{\leftarrow}\langle f(x_m), \infty]$, tj. $f(x_m) < f(x_m)$. Dakle, pretpostavka da f ne poprima minimum je bila kriva. □

13. Pokazati da je (odozdo polu)neprekinuta funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nerastuća ako i samo ako je $D_+ f \leqslant 0$.

[Naputak: $D_+ f \leqslant 0$ je očito nužan uvjet. Obratno, uočimo da monotonost slijedi ako za proizvoljne $x < y$ pokažemo

$$(\forall \delta > 0)\ \min f[y, y+\delta] \leqslant f(x)\,. \tag{$*$}$$

Za dokaz $(*)$ najprije konstruirati funkciju $g\colon \langle x-\delta, y+\delta\rangle \to \mathbb{R}$ sa svojstvima

a) $g \in \mathrm{C}^1\langle x-\delta, y+\delta\rangle, g \geqslant 0, g(t) = 0$ ako i samo ako je $t = y$,

b) $g'\langle x-\delta, y\rangle < 0$ i $g'[y, y+\delta\rangle \geqslant 0$, i

c) $\lim_{t\to x-\delta^+} g(t) = \infty$ i $\lim_{t\to y+\delta^-} g(t) = \infty$.

Potom minimizirati $f + g$ na $\langle x-\delta, y+\delta\rangle$; zbog (odozdo polu)neprekinutosti i (c), minimum se poprima u barem jednoj točki $z \in \langle x-\delta, y+\delta\rangle$. Nužan uvjet za minimum je: $D_+(f+g)(z) = D_+f(z) + g'(z) \geqslant 0$ što daje $g'(z) \geqslant 0$, odnosno $z \in [y, y+\delta\rangle$ po (b).

Sada lako slijedi da je $\min f[y, y+\delta] \leqslant f(x) + g(x)$. Ponavljanjem argumenta za εg namjesto g, na limesu $\varepsilon \to 0$ slijedi $(*)$.]

Rješenje. □

14.*

Literatura

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi dio*, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970.