Druga zadaća iz Realne i funkcionalne analize

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

10. travnja 2010.

1. S $\mathcal{M}_b(X)$ ($\mathcal{M}_b(X, \mathfrak{M})$ ako je potrebno da se izbjegne dvoznačnost) označimo skup svih realnih (ili kompleksnih; ponovno, možemo koristiti oznake $\mathcal{M}_b(X; \mathbb{R})$ i $\mathcal{M}_b(X; \mathbb{C})$ da bi se izbjegla moguća zabuna) mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathfrak{M})$. Indeks b pišemo kako bismo naglasili da se radi o konačnim mjerama. S $|\mu|$ označujemo totalnu varijaciju mjere μ.

a) Pokazati da je s operacijama zbrajanja i množenja skalarom po točkama

$$(\mu_1 + \lambda\mu_2)(A) := \mu_1(A) + \lambda\mu_2(A)$$

skup $\mathcal{M}_b(X)$ vektorski prostor.

Rješenje. Pokazat ćemo da je $\mathcal{M}_b(X)$ potprostor prostora $\mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ (odnosno, $\mathbb{C}^{\mathfrak{M}}$). Neka su $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_b(X)$ i neka je λ skalar. Tada je

$$(\mu_1 + \lambda\mu_2)\emptyset = \mu_1\emptyset + \lambda\mu_2\emptyset = 0\,.$$

Nadalje, neka je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathfrak{M}$.

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \lambda\mu_2)\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) &= \mu_1\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) + \lambda\mu_2\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_n) + \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu_1 + \lambda\mu_2)(E_n)\,.\end{aligned}$$

Naime, svi redovi u prethodnom računu su apsolutno konvergentni jer im suma ne ovisi o redoslijedu sumacije. (Riemannov teorem o rearanžiranju redova s druge strane kaže da uvjetno konvergentan red možemo rearanžirati tako da suma bude bilo što.) □

b) Pokazati da je $\|\mu\|_{\mathcal{M}_b(X)} := \|\mu\| := |\mu|(X)$ norma na $\mathcal{M}_b(X)$, te da je uz tu normu prostor $\mathcal{M}_b(X)$ potpun (dakle, Banachov prostor).

Rješenje. Očito je $\|\mu\| \geqslant 0$ zbog nenegativnosti $|\mu|$.

Pretpostavimo da je $\|\mu\| = 0$. Tada je $|\mu|(X) = 0$. Iskoristimo karakterizaciju totalne varijacije u realnom, tj. definiciju u kompleksnom slučaju:

$$|\mu|(X) = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{n} |\mu A_k| \;\Big|\; n \in \mathbb{N};\ A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M} \quad \& \quad \dot{\bigcup_{k\in 1..n}} A_k = X \Big\}\,. \tag{1}$$

Specijalno, za proizvoljan $E \in \mathfrak{M}$ vrijedi

$$|\mu E| + |\mu(cE)| \leqslant |\mu|(X) = 0\,,$$

pa je $\mu E = 0$. Dakle, $\mu = 0$.

Iz (1) lako slijede i ostala svojstva norme:

$$\begin{aligned}\|\lambda\mu\| &= |\lambda\mu|(X) = |\lambda||\mu|(X) \\ &= |\lambda|\|\mu\|\,,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\|\mu+\nu\| &= |\mu+\nu|(X) \\ &\leqslant |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\| + \|\nu\|\,.\end{aligned}$$

Da bismo dokazali potpunost, pokazat ćemo da svaki apsolutno konvergentan red u $\mathcal{M}_b(X)$ konvergira u $\mathcal{M}_b(X)$. Neka je $\sum_n \mu_n$ apsolutno konvergentan red. Tada konvergira

$$\sum_n \|\mu_n\| = \sum_n |\mu_n|(X)\,.$$

Zabilježimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$k \geqslant k_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=k+1}^{\infty} |\mu_n|(X) < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Iz (1) slijedi da za svaki $E \in \mathfrak{M}$ vrijedi

$$|\mu_n E| \leqslant |\mu_n E| + |\mu_n(cE)| \leqslant |\mu_n|(X)$$

pa zaključujemo da konvergira red $\sum_n |\mu_n E|$, tj. red $\sum_n \mu_n E$ konvergira apsolutno. Iz potpunosti $\mathbb{R}$ (odn. $\mathbb{C}$) zaključujemo da $\sum_n \mu_n E$ konvergira.

Definiramo $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ (odn. $\mathbb{C}$) s $\mu E := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n E$. Odmah se vidi da je $\mu\emptyset = 0$. Nadalje, ako je $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathfrak{M}$, vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_n(E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu E_i\,.$$

Prema tome, μ je mjera s predznakom.

Označimo $\sigma_k := \mu_1 + \ldots + \mu_k$. Želimo ocijeniti $\|\sigma_k - \mu\|$ kako bismo dokazali uniformnu konvergenciju. Opet ćemo se poslužiti karakterizacijom (1). Naime, uzmimo proizvoljne disjunktne $A_1, \ldots, A_j \in \mathfrak{M}$ čija je unija X. Vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j} |(\sigma_k - \mu)(A_i)| &= \sum_{i=1}^{j} \Big|\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu_n A_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{j}\sum_{n=k+1}^{\infty} |\mu_n A_i| \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} |\mu_n A_i| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} |\mu_n|(X)\,.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\|\sigma_k - \mu\| = |\sigma_k - \mu|(X) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} |\mu_n|(X)\,.$$

Iz (2) slijedi: ako je $\varepsilon > 0$, za $k \geqslant k_\varepsilon$ vrijedi

$$\|\sigma_k - \mu\| < \varepsilon\,.$$

Dakle, red $\sum_n \mu_n$ konvergira k μ. Time je dokazana potpunost prostora $\mathcal{M}_b(X)$. □

c) Ako $\|\mu_n - \mu\| \longrightarrow 0$, onda $(\forall A \in \mathfrak{M})\ \mu_n A \longrightarrow \mu A$. (Jako konvergentan niz mjera je i slabo konvergentan u gornjem smislu.)

Rješenje. Pretpostavimo $\|\mu_n - \mu\| \longrightarrow 0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da

$$n \geqslant k_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|\mu_n - \mu\| < \varepsilon\,.$$

No, tada za $A \in \mathfrak{M}$ i $n \geqslant k_\varepsilon$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\mu_n A - \mu A| = |(\mu_n - \mu)(A)| &\leqslant |(\mu_n - \mu)(A)| + |(\mu_n - \mu)(cA)| \\ &\leqslant |\mu_n - \mu|(X) = \|\mu_n - \mu\| < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Pritom smo predzadnju nejednakost dobili iz (1) (s $|\mu_n - \mu|$ umjesto $|\mu|$). □

2. (**Borelove mjere na** $\mathbb{R}$) Polazimo od poluotvorenih intervala oblika $[a, b\rangle$, koji dogovorno uključuju i $\langle -\infty, b\rangle$ i $\emptyset$. Skup svih takvih označimo s $\mathcal{E}$, a skup svih konačnih disjunktnih unija elemenata iz $\mathcal{E}$ s $\mathcal{A}$. $\mathcal{E}$ je poluprsten, a $\mathcal{A}$ algebra, dok je $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Mjera je *Borelova* ako je svaki Borelov skup (tj. skup iz $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\tau)$) izmjeriv.

Neka je $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija, koja tada ima limese i slijeva i zdesna u svakoj točki:

$$\begin{aligned}F(a^-) &= \lim_{x \nearrow a} F(x) = \sup_{x<a} F(x)\,, \\ F(a^+) &= \lim_{x \searrow a} F(x) = \inf_{x>a} F(x)\,.\end{aligned}$$

Posebno, postoje granične vrijednosti F u $\pm\infty$ (koje mogu biti i beskonačne). Funkcija F je *neprekinuta slijeva (zdesna)* ako je $F(x) = F(x^\pm)$, za $x \in \mathbb{R}$.

U daljnjem koristimo intervale oblika $[a, b\rangle$ i slijeva neprekinutu funkciju F, premda bismo analognu konstrukciju mogli načiniti i za intervale oblika $\langle a, b]$, uz korištenje zdesna neprekinutih funkcija.

a) Ako je $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neopadajuća i neprekinuta slijeva, onda je funkcija $\gamma\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom
$$\gamma\Big(\dot{\bigcup_{k\in 1..n}} [a_k, b_k\rangle\Big) := \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$
predmjera na algebri $\mathcal{A}$ (posebno, $\gamma\emptyset = \gamma[a, a\rangle = 0$).

Rješenje. Pokažimo da je γ dobro definirana. Prvo razjasnimo sitan detalj: ako je $a_k = -\infty$, onda se u sumi zdesna zapravo gleda $F(a_k^+)$. Jasno je, budući da se radi o infimumu skupa $F(\mathbb{R})$, da nikako ne može biti $F(a_k^+) = \infty$. Sasvim analogno, ako je $b_k = \infty$, ne može biti $F(b_k^-) = -\infty$. Prema tome, suma na desnoj strani definicije funkcije γ uvijek ima smisla.

Nadalje, primijetimo da se elementi različiti od $\emptyset$ iz $\mathcal{A}$ mogu na jedinstven način prikazati u obliku

$$\dot{\bigcup_{k\in 1..n}} [a_k, b_k\rangle\,, \qquad \text{pri čemu } b_k < a_{k+1} \text{ za } 1 \leqslant k < n\,. \tag{3}$$

Naime, proizvoljan neprazan element iz $\mathcal{A}$ bez smanjenja općenitosti možemo prikazati u obliku (3) pri čemu $b_k \leqslant a_{k+1}$ za $1 \leqslant k < n$. Zatim sve slučajeve „dodirivanja”, $[a_k, b_k\rangle \cup [a_{k+1}, b_{k+1}\rangle$ pri čemu $a_k = b_{k+1}$, sažmemo u veći interval $[a_k, b_{k+1}\rangle$, ponavljajući postupak iterativno dok ne eliminiramo sva „dodirivanja”. Lako se vidi da je dobiveni prikaz jedinstven.

Evidentno se u definiciji funkcije γ opisani postupak sažimanja dobro odražava na sumu s desne strane: $F(b_k) - F(a_{k+1}) = 0$ ako je $b_k = a_{k+1}$. Iz jedinstvenosti prikaza (3) slijedi da je γ dobro definirana. Na kraju, iz činjenice da je F neopadajuća slijedi da je γ nenegativna.

Pokažimo sad da je γ predmjera. Već imamo $\gamma\emptyset = 0$; ostaje pokazati σ-aditivnost. Primijetimo da konačna aditivnost proizlazi direktno iz definicije: neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunktni i bez smanjenja općenitosti neprazni; tada svaki A_i ima prikaz oblika (3): $A_i = \bigcup_{k\in 1..n_i} [a^i_k, b^i_k\rangle$. Slijedi

$$\gamma\Big(\dot{\bigcup_{i\in 1..n}} A_i\Big) = \gamma\Big(\dot{\bigcup_{i\in 1..n}} \dot{\bigcup_{k\in 1..n_i}} [a^i_k, b^i_k\rangle\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i}(F(b^i_k) - F(a^i_k)) = \sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i)\,.$$

Iz konačne aditivnosti i nenegativnosti jednostavno slijedi i monotonost funkcije γ.

Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih elemenata iz $\mathcal{A}$ takvih da je $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ i pretpostavimo da je beskonačno mnogo članova niza neprazno. Zapravo, tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi neprazni. Budući da svaki A_i ima prikaz oblika (3), uz pomoć konačne aditivnosti γ možemo se bez smanjenja općenitosti ograničiti na slučaj kad su A_i upravo intervali $[a_i, b_i\rangle$. Nadalje, i sam A ima prikaz oblika (3). Stoga se niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ raspada na konačno mnogo podnizova čija je unija jedan interval. Opet pomoću konačne aditivnosti možemo gledati svaki podniz zasebno i tako se ograničiti na slučaj kad je $A = [a, b\rangle$.

Zbog konačne aditivnosti i monotonosti funkcije γ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i) = \gamma\Big(\dot{\bigcup_{i\in 1..n}} A_i\Big) \leqslant \gamma(A)\,.$$

Stoga niz parcijalnih suma konvergira, tj. postoji $\sum_{i\in\mathbb{N}}\gamma(A_i)$ (možda jednak ∞) te vrijedi

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\gamma(A_i) \leqslant \gamma(A)\,.$$

U dokazu obrnute nejednakosti razmotrimo prvo slučaj kad su a i b konačni. Očito su tada i svi a_i i b_i konačni.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekinutosti F slijeva, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$F(b) - F(b - \delta) < \varepsilon\,,$$

te za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $\delta_i > 0$ takav da je

$$F(a_i) - F(a_i - \delta_i) < \varepsilon \cdot 2^{-i}\,.$$

Očito intervali $\langle a_i - \delta_i, b_i\rangle$ čine otvoren pokrivač kompakta $[a, b - \delta]$. Stoga postoje $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$ takvi da intervali $\langle a_{i_j} - \delta_{i_j}, b_{i_j}\rangle$ pokrivaju $[a, b-\delta]$. Dodatno, možemo pretpostaviti da nijedan interval iz konačnog potpokrivača nije u cijelosti sadržan u drugom intervalu, te da su intervali numerirani tako da je $b_{i_j} \in \langle a_{i_{j+1}} - \delta_{i_{j+1}}, b_{i_{j+1}}\rangle$ za $1 \leqslant j < m$.

Vrijedi sljedeće:

$$
\begin{aligned}
\gamma[a,b\rangle &= F(b) - F(a) \\
&< F(b-\delta) - F(a) + \varepsilon \\
&< F(b_{i_m}) - F(a_{i_1} - \delta_{i_1}) + \varepsilon \\
&= F(b_{i_m}) - F(a_{i_m} - \delta_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} \big(F(a_{i_{j+1}} - \delta_{i_{j+1}}) - F(a_{i_j} - \delta_{i_j})\big) + \varepsilon \\
&< F(b_{i_m}) - F(a_{i_m} - \delta_{i_m}) + \sum_{j=1}^{m-1} \big(F(b_{i_j}) - F(a_{i_j} - \delta_{i_j})\big) + \varepsilon \\
&< \sum_{j=1}^{m} (\underbrace{F(b_{i_j}) - F(a_{i_j})}_{\gamma(A_{i_j})} + \varepsilon \cdot 2^{-i_j}) + \varepsilon \\
&< \sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma(A_i) + 2\varepsilon \,.
\end{aligned}
$$

Zbog proizvoljnosti ε je $\gamma[a,b\rangle \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma(A_i)$.

Razmotrimo sada slučaj kad je $a = -\infty$. Primijetimo da su zbog disjunktnosti intervala $A_i = [a_i, b_i\rangle$ moguća dva slučaja: ili su svi a_i konačni ili postoji točno jedan $j \in \mathbb{N}$ takav da je $a_j = -\infty$. U prvom slučaju umjesto $[a,b\rangle$ promotrimo interval $[M,b\rangle$, pri čemu je $M \in \mathbb{R}$, $M < b$. Tada intervali $\langle a_i - \delta_i, b_i\rangle$ čine otvoren pokrivač kompakta $[M, b-\delta]$ pa kao i ranije zaključimo

$$F(b) - F(M) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma(A_i)\,.$$

Prelaskom na limes po $M \longrightarrow -\infty$ slijedi tvrdnja.

U drugom slučaju neka je $M \in \mathbb{R}$ takav da je $M < b_j$. Tada je

$$[M,b\rangle = [M,b_j\rangle \cup \bigcup_{i\neq j} A_i\,.$$

Iz dokazanog slijedi

$$F(b) - F(M) \leqslant F(b_j) - F(M) + \sum_{i\neq j} \gamma(A_i)$$

pa tvrdnju opet dobijemo prelaskom na limes po $M \longrightarrow -\infty$.

Slično postupimo u slučaju kad je $b = \infty$. □

b) Za funkciju F sa svojstvima kao u (a) postoji jedinstvena mjera μ_F na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ takva da je $\mu_F[a,b\rangle = F(b) - F(a)$.

Rješenje. Predmjeru γ iz (a) možemo proširiti do mjere μ_F na $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\mathcal{A})$ prema Hopfovom teoremu o proširenju ([1, str. 54]). Nadalje, očito je svaka mjera μ_F za koju je $\mu_F[a,b\rangle = F(b) - F(a)$ proširenje predmjere γ. Jedinstvenost tada također slijedi iz Hopfovog teorema zbog činjenice da je γ σ-konačna:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1\rangle \quad \text{i} \quad \gamma[n,n+1\rangle = F(n+1) - F(n) < \infty\,.$$

□

c) Ako su F i G funkcije kao u (a), onda je $\mu_F = \mu_G$ ako i samo ako je $F - G$ konstanta.

Rješenje. Pretpostavimo da je $\mu_F = \mu_G$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada vrijedi

$$F(b) - F(a) = \mu_F[a, b\rangle = \mu_G[a, b\rangle = G(b) - G(a)\,.$$

Zaključujemo da je $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$ pa je $F - G$ konstanta.

Obratno, ako je $F-G$ konstanta, onda za $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ vrijedi $F(b)-G(b) = F(a)-G(a)$ pa imamo

$$\mu_G[a, b\rangle = G(b) - G(a) = F(b) - F(a)\,.$$

Tada zbog jedinstvenosti mjere μ_F (podzadatak (b)) slijedi $\mu_F = \mu_G$. □

d) Ako je μ mjera definirana na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, te konačna na kompaktima, onda je

$$F(x) := \begin{cases} \mu[0, x\rangle, & \text{za } x > 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \\ -\mu[x, 0\rangle, & \text{za } x < 0, \end{cases}$$

neopadajuća i slijeva neprekinuta funkcija, te je $\mu = \mu_F$.

Rješenje. Zbog konačnosti na kompaktima i monotonosti μ za $x > 0$ imamo

$$F(x) = \mu[0, x\rangle \leqslant \mu[0, x] < \infty\,.$$

Analogno za $x < 0$ vrijedi $F(x) > -\infty$. Stoga je F doista funkcija s $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$, imamo tri slučaja. Ako je $x \geqslant 0$, onda je

$$F(x) = \mu[0, x\rangle \leqslant \mu[0, y\rangle = F(y)\,.$$

Analogno u slučaju da je $y \leqslant 0$. Ako je pak $x < 0$ i $y > 0$, onda je očito $F(x) \leqslant 0$ i $F(y) \geqslant 0$ (zbog nenegativnosti μ) pa opet imamo $F(x) \leqslant F(y)$. Dakle, F je neopadajuća.

Da bismo pokazali neprekinutost slijeva, prvo primijetimo da za $x < y$ vrijedi

$$\mu[x, y\rangle = F(y) - F(x)\,. \tag{4}$$

Naime, opet možemo promatrati tri slučaja. Ako je $x \geqslant 0$, onda je zbog konačne aditivnosti

$$\mu[x, y\rangle = \mu[0, y\rangle - \mu[0, x\rangle = F(y) - F(x)\,.$$

Analogno u slučaju $y \leqslant 0$. Ako je $x < 0$ i $y > 0$, onda imamo

$$\mu[x, y\rangle = \mu[x, 0\rangle + \mu[0, y\rangle = F(y) - F(x)\,.$$

Neprekinutost slijeva sada pokazujemo na sljedeći način. Neka su $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Promatramo niz skupova $[x-\frac{1}{n}, x\rangle$ za $n \in \mathbb{N}$. To je padajući niz i zbog konačnosti na kompaktima μ je konačna na svim njegovim članovima. Zbog neprekinutosti na padajuće nizove vrijedi

$$\lim_n \mu[x - \tfrac{1}{n}, x\rangle = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x - \tfrac{1}{n}, x\rangle\Big) = \mu\emptyset = 0\,.$$

Prema tome, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu[x - \frac{1}{n}, x\rangle < \varepsilon$. Stavimo $\delta := \frac{1}{n}$. Tada za $y \in \langle x - \delta, x\rangle$ vrijedi

$$F(x) - F(y) = \mu[y, x\rangle \leqslant \mu[x - \delta, x\rangle < \varepsilon\,.$$

Dakle, F je neprekinuta slijeva.

Iz (4) i (b) sada slijedi $\mu = \mu_F$. □

3.*

4. Uz oznake uvedene u Zadaći I.7, označimo s $\mathcal{R}^* f$ infimum svih gornjih Darbouxovih suma za f, a s $\mathcal{R}_* f$ supremum svih donjih.

Pokazati sljedeće tvrdnje:

a) *Dirichletova funkcija* $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ nije Riemann-integrabilna.

Rješenje. Uvedimo kraću oznaku $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Neka je $\rho = (x_0, \ldots, x_n)$ proizvoljna razdioba segmenta $[0,1]$. Tada za sve k, $0 \leqslant k < n$ vrijedi

$$\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = 0\,, \qquad \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = 1\,,$$

s obzirom da u svakom segmentu $[x_k, x_{k+1}]$ ima racionalnih i iracionalnih brojeva. Zaključujemo

$$d_f(\rho) = 0\,, \qquad D_f(\rho) = 1\,.$$

Prema tome, $\mathcal{R}_* f = 0$ i $\mathcal{R}^* f = 1$ pa f nije Riemann-integrabilna. □

b) *Riemannova funkcija* $R\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je nula na iracionalnim brojevima, dok je za racionalan r, koji možemo prikazati kao (do kraja skraćen razlomak, $q > 0$) $\frac{p}{q}$ jednaka $\frac{1}{q}$. Pokazati da je R Riemann-integrabilna.

Rješenje. Analogno kao u (a) vidi se da je $\mathcal{R}_* R = 0$ (u svakom segmentu svake razdiobe postoji iracionalan broj). Moramo pokazati da je i $\mathcal{R}^* R = 0$.

Pokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0$ postoji razdioba ρ takva da je $D_R(\rho) < \frac{1}{n} + \delta$. Naime, promotrimo skup

$$S_n := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; 0 < q < n,\ 0 < p < q,\ p \text{ i } q \text{ relativno prosti} \right\}.$$

S_n je konačan skup; označimo mu elemente u uzlaznom poretku: $S_n = \{r_1, \ldots, r_k\}$.

Ideja je odabrati razdiobu segmenta $[0,1]$ tako da svaki $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ izoliramo vrlo malim segmentom. Na tom segmentu će supremum funkcije R biti $\frac{1}{q_i}$, dok će na „međusegmentima" supremum biti manji ili jednak $\frac{1}{n}$.

U skladu s tim, neka je $m > n(n-1)$. Tada je dobro definirana razdioba

$$\rho_{n,m} = (0, r_1 - \tfrac{1}{2m}, r_1 + \tfrac{1}{2m}, \ldots, r_k - \tfrac{1}{2m}, r_k + \tfrac{1}{2m}, 1)\,.$$

Označimo radi lakšeg zapisivanja točke razdiobe s $x_0, \ldots, x_{2k+1}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} D_R(\rho_{n,m}) &= \sum_{j=0}^{2k} \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} R(x)(x_{j+1} - x_j) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{n}(x_{2j+1} - x_{2j}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i}(x_{2i} - x_{2i-1}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k}{m}\right) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i}\,. \end{aligned}$$

Kada $m \longrightarrow \infty$, desna strana teži k $\frac{1}{n}$. Stoga za $\delta > 0$ postoji m_δ za koji je desna strana manja od $\frac{1}{n} + \delta$. Slijedi da je

$$D_R(\rho_{n,m_\delta}) < \frac{1}{n} + \delta\,.$$

Ako je sad $\varepsilon > 0$, prvo odaberemo n takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Neka je $\delta := \varepsilon - \frac{1}{n}$. Tada vrijedi

$$D_R(\rho_{n,m_\delta}) < \frac{1}{n} + \delta = \varepsilon\,.$$

Prema tome, vrijedi $\mathcal{R}^* R = 0$ te zaključujemo da je R Riemann-integrabilna. □

c) Karakteristična funkcija Cantorovog skupa je Riemann-integrabilna.

Rješenje. Označimo karakterističnu funkciju Cantorovog skupa s χ. Jasno je da vrijedi $0 \leqslant \mathcal{R}_* \chi \leqslant \mathcal{R}^* \chi$. Prema tome, dovoljno je dokazati $\mathcal{R}^* \chi = 0$.

Slično kao u (b) podzadatku, dokazat ćemo da za svaki $n \in \mathbb{N}, n > 1$ i $\delta > 0$ postoji razdioba ρ segmenta $[0, 1]$ za koju vrijedi $D_\chi(\rho) < \frac{1}{n} + \delta$.

Naime, neka je $n > 1$. Induktivno definiramo razdiobe $\rho_{n,m}$ slijedeći induktivnu definiciju Cantorovog skupa: stavimo $\rho_{n,0} := (0, 1)$ (ova razdioba odgovara početnom skupu $C_0 = [0, 1]$). Razdiobu $\rho_{n,m+1}$ dobijemo kao profinjenje $\rho_{n,m}$: za svaki interval $\langle \frac{k}{3^{m+1}}, \frac{k+1}{3^{m+1}} \rangle$ koji izuzimamo iz C_m kako bismo dobili C_{m+1} dodajemo točke

$$\frac{k}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1} \cdot 2n} \qquad \text{i} \qquad \frac{k+1}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+1} \cdot 2n}\,.$$

Dakle, segmenti određeni parovima dodanih točaka u cijelosti su sadržani u izuzetom skupu pa je na njima χ nula. To se odražava na pripadne gornje Darbouxove sume na sljedeći način:

$$\begin{aligned} D_\chi(\rho_{n,0}) &= 1 \\ D_\chi(\rho_{n,m+1}) &= D_\chi(\rho_{n,m}) - 2^m\left(\frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+1} n}\right) \\ &= D_\chi(\rho_{n,m}) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Teleskopiranjem (ili indukcijom po m) lako se vidi da je

$$D_\chi(\rho_{n,m}) = \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{3}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Dakle, $\lim_m D_\chi(\rho_{n,m}) = \frac{1}{n}$. Prema tome, ako je $\delta > 0$, postoji m_δ takav da je

$$D_\chi(\rho_{n,m_\delta}) < \frac{1}{n} + \delta\,.$$

Ako je $\varepsilon > 0$, odaberemo n takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Označimo $\delta := \varepsilon - \frac{1}{n}$; tada je

$$D_\chi(\rho_{n,m_\delta}) < \frac{1}{n} + \delta = \varepsilon\,.$$

Zaključujemo da je $\mathcal{R}^* \chi = 0$, kao što smo htjeli. □

d) (**Čebiševljeva nejednakost**) Ako je f nenegativna omeđena funkcija na $\langle a, b\rangle$, $\varepsilon > \mathcal{R}^* f$ i $\delta > 0$, onda se skup $f^{\leftarrow}[\delta, \infty\rangle$ može pokriti konačnim brojem intervala, sa zbrojem duljina manjim od $\frac{\varepsilon}{\delta}$ (pa je $\lambda^*(f^{\leftarrow}[\delta, \infty\rangle) < \frac{\varepsilon}{\delta}$).

Rješenje. Pretpostavljam da govorimo o funkciji definiranoj na segmentu $[a, b]$. Kako je $\mathcal{R}^* f < \varepsilon$, postoji razdioba $\rho = (x_0, \ldots, x_n)$ segmenta $[a, b]$ za koju je $D_f(\rho) < \varepsilon$. Uvedimo oznaku

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Primijetimo da, ukoliko je $M_i < \delta$, vrijedi $[x_{i-1}, x_i] \cap f^{\leftarrow}[\delta, \infty\rangle = \emptyset$. Stoga, ako s K označimo skup indeksa i za koje je $M_i \geqslant \delta$, onda je $f^{\leftarrow}[\delta, \infty\rangle$ prekriven segmentima $[x_{i-1}, x_i]$ za $i \in K$. (Primijetimo da je K neprazan ako je $f^{\leftarrow}[\delta, \infty\rangle$ neprazan.) Vrijedi

$$\sum_{i \in K} \delta(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i \in K} M_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant D_f(\rho) < \varepsilon\,.$$

Prema tome,

$$\sum_{i \in K} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{\delta}\,.$$

Ako želimo učiniti pokrivač otvorenim, umjesto segmenata $[x_{i-1}, x_i]$ možemo uzeti intervale $\langle x_{i-1} - \zeta, x_i + \zeta\rangle$, pri čemu je $\zeta > 0$ takav da je

$$\sum_{i \in K} (x_i - x_{i-1}) + 2n\zeta < \frac{\varepsilon}{\delta}\,.$$

□

5.*

6. (**Neodređeni Lebesgueov integral**) Neka je $(X, \mathfrak{M})$ izmjeriv prostor. Za integrabilnu funkciju $f \in \mathcal{L}^*$ definiramo *neodređeni Lebesgueov integral* kao skupovnu funkciju μ_f na $\mathfrak{M}$ formulom

$$\mu_f(E) := \int_E f\,.$$

Pokazati da je μ_f mjera s predznakom na X. Štoviše, $\mu_f(E) = 0$ na svakom skupu E mjere nula. Kako je to svojstvo ekvivalentno sa sljedećim:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \mu E < \delta \implies |\mu_f E| < \varepsilon\,,$$

to se naziva i *apsolutnom neprekinutošću* mjere μ_f s obzirom na μ.

Ako je f sumabilna, onda je μ_f konačna (realna ili kompleksna) mjera.

[Postavlja se pitanje obrata: ako su μ i ν bilo koje dvije (uzmimo pozitivne) mjere na $\mathfrak{M}$, postoji li nenegativna μ-izmjeriva funkcija f na X takva da vrijedi $\nu E = \int_E f d\mu$, ako je ispunjen nužni uvjet da $\mu E = 0$ povlači $\nu E = 0$. Pozitivan odgovor za σ-konačne prostore mjere daje *Radon-Nikodýmov* teorem.]

Rješenje. Neka je prvo f nenegativna izmjeriva funkcija. Tada je $\mu_f \colon \mathfrak{M} \to [0, \infty]$. Svakako imamo $\mu_f \emptyset = 0$, naime

$$\int_\emptyset f d\mu = \int_X f \chi_\emptyset d\mu = \int_X \mathbf{0} d\mu = 0\,.$$

Neka je $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz disjunktnih izmjerivih skupova. Označimo s $F_n := E_1 \cup \ldots \cup E_n$. Lako se vidi da je $\chi_{F_n} = \chi_{E_1} + \ldots + \chi_{E_n}$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}\int_X f \chi_{F_n} d\mu &= \int_X f(\chi_{E_1} + \ldots + \chi_{E_n}) d\mu \\ &= \int_X f \chi_{E_1} d\mu + \ldots + \int_X f \chi_{E_n} d\mu = \sum_{k=1}^n \mu_f(E_k)\,.\end{aligned}$$

Promotrimo niz izmjerivih funkcija $(f\chi_{F_n})$. Očito je to rastući niz koji po točkama teži k funkciji $f\chi_F$ pri čemu $F := \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Prema teoremu o monotonoj konvergenciji vrijedi

$$\int_X f\chi_F d\mu = \lim_n \int_X f\chi_{F_n} d\mu \,.$$

Dakle,

$$\mu_f\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n\Big) = \int_F f d\mu = \lim_n \int_X f\chi_{F_n} d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu_f(E_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(E_n)\,.$$

Time smo pokazali da je μ_f mjera. Neka je sada f izmjeriva funkcija za koju postoji integral. Tada je

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\,,$$

te je barem jedan od integrala s desne strane konačan. Slijedi da su μ_{f^+} i μ_{f^-} mjere od kojih je barem jedna konačna. Stoga je $\mu_f = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$ mjera s predznakom.

Za proizvoljnu integrabilnu funkciju f činjenica da je μ_f mjera s predznakom sada jednostavno slijedi restrikcijom na skup sa zanemarivim komplementom na kojem je f izmjeriva i primjenom dokazanog.

Ako je f sumabilna, onda je $\int_X |f| d\mu < \infty$. S obzirom da vrijedi

$$f^+ \leqslant f^+ + f^- = |f|\,, \qquad f^- \leqslant f^+ + f^- = |f|\,,$$

koristeći monotonost integrala zaključujemo

$$\int_X f^+ d\mu < \infty\,, \qquad \int_X f^- d\mu < \infty\,.$$

Prema tome, obje mjere μ_{f^+} i μ_{f^-} su konačne pa je i $\mu_f = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$ konačna.

U slučaju sumabilne kompleksne funkcije f također vrijedi $\int_X |f| d\mu < \infty$. Ako realni i imaginarni dio označimo s f_r i f_i, vrijedi

$$|f_r| + |f_i| \leqslant \sqrt{2}|f|\,.$$

Koristeći monotonost zaključujemo da su f_r i f_i sumabilne. Tada su μ_{f_r} i μ_{f_i} konačne realne mjere, a $\mu_f = \mu_{f_r} + i\mu_{f_i}$ je konačna kompleksna mjera. □

7. a) Pokazati da su elementarne funkcije guste u $\mathrm{L}^1(X)$.

Rješenje. Prvo primijetimo da je integral elementarne funkcije konačan broj (realan ili kompleksan) pa je svaka elementarna funkcija sumabilna.

Neka je sada $f \in \mathrm{L}^1(X)$. Bez smanjenja općenitosti, f je izmjeriva funkcija (općenito, razlikuje se od izmjerive eventualno na zanemarivom skupu). Označimo realan i kompleksan dio funkcije f s f_r i f_i; tada su f_r^+, f_r^-, f_i^+, f_i^- nenegativne izmjerive funkcije pa ih možemo aproksimirati rastućim nizovima nenegativnih jednostavnih funkcija (φ_n^+), (φ_n^-), (ψ_n^+), (ψ_n^-).

Promotrimo funkciju φ_n^+ za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je njen standardni prikaz

$$\varphi_n^+ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}\,.$$

Pritom su $\alpha_i \in \mathbb{R}_0^+$ i $A_i = (\varphi_n^+)^{\leftarrow}\{\alpha_i\}$. Budući da je $\varphi_n^+ \leqslant f_r^+$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int_X \varphi_n^+ d\mu \leqslant \int_X f_r^+ d\mu < \infty\,.$$

Pritom zadnja nejednakost vrijedi zbog toga što je f sumabilna. Zaključujemo da je $\mu(A_i) < \infty$ za $1 \leqslant i \leqslant m$, tj. φ_n^+ je elementarna. Analogno, φ_n^-, ψ_n^+ i ψ_n^- su elementarne za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Tada su za svaki $n \in \mathbb{N}$ elementarne i funkcije

$$\phi_n := (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) + i(\psi_n^+ - \psi_n^-)\,.$$

Očito $\phi_n \longrightarrow f$. Nadalje, uz oznake $\varphi_n := \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ i $\psi_n := \psi_n^+ - \psi_n^-$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\phi_n| \leqslant |\varphi_n| + |\psi_n| &\leqslant \varphi_n^+ + \varphi_n^- + \psi_n^+ + \psi_n^- \\ &\leqslant f_r^+ + f_r^- + f_i^+ + f_i^- = |f_r| + |f_i| \leqslant \sqrt{2}|f|\,.\end{aligned}$$

Prema teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_n \int_X |\phi_n - f| d\mu = 0\,.$$

Drugim riječima, za $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|\phi_n - f\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon\,,$$

a to upravo znači da je skup svih elementarnih funkcija gust u $\mathrm{L}^1(X)$. □

b*)

c) Za Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^d$ neprekinute funkcije s kompaktnim nosačem su guste u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. To možemo interpretirati na dva načina: ili se izmjerive funkcije ne razlikuju bitno od neprekinutih, ili je L^1 norma gruba. Koja od tih dviju interpretacija ima važniju ulogu?

Rješenje. Označimo Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^d$ s λ te skup Lebesgue-izmjerivih skupova s $\mathfrak{M}$. Da bismo dokazali tvrdnju podzadatka, potrebne su nam dvije leme.

Lema 1. *Za svaki $E \in \mathfrak{M}$ takav da je $\lambda(E) < \infty$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo disjunktnih kvadara $A_1, \ldots, A_n$ takvih da je*

$$\lambda\Big(E \bigtriangleup \bigcup_{k=1}^n A_k\Big) < \varepsilon\,.$$

Dokaz. Iz konstrukcije Lebesgueove mjere slijedi da za $\varepsilon > 0$ postoje kvadri A_k, $k \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \qquad \text{i} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(A_k) < \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi $\sum_{k\geqslant n+1} \lambda(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\lambda\Big(E\Big\backslash \bigcup_{k=1}^n A_k\Big) &\leqslant \lambda\Big(\bigcup_{k\geqslant n+1} A_k\Big) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} \lambda(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\\ \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k \Big\backslash E\Big) &\leqslant \lambda\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \Big\backslash E\Big) < \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ove dvije nejednakosti i primjedbom da se $\bigcup_{k=1}^n A_k$ može prikazati kao konačna unija disjunktnih kvadara slijedi tvrdnja. □

Lemu 1 koristimo na sljedeći način. Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema podzadatku (a) postoji elementarna funkcija $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ za koju je $\|f-g\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon/2$. Prema lemi 1 za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant n$, postoji B_i koji je konačna disjunktna unija kvadara i za koji vrijedi

$$\lambda(A_i \bigtriangleup B_i) < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}\,.$$

Lako se vidi da je $\lambda(A_i \bigtriangleup B_i) = \int |\chi_{A_i} - \chi_{B_i}| d\lambda$ pa uz oznaku $h := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}$ zaključujemo

$$\|f-h\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|f-g\|_{\mathrm{L}^1} + \|g-h\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|f-g\|_{\mathrm{L}^1} + \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|\chi_{A_i} - \chi_{B_i}\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon\,.$$

Ako je $B_i = \bigcup_{k=1}^m R_k^i$ pri čemu su R_k^i disjunktni, očito je $\chi_{B_i} = \chi_{R_1^i} + \ldots + \chi_{R_m^i}$. Iz svega zaključujemo da se f može aproksimirati funkcijom koja je linearna kombinacija karakterističnih funkcija kvadara. Sljedeći korak je takve funkcije aproksimirati neprekinutim funkcijama s kompaktnim nosačem. O tome govori sljedeća lema.

Lema 2. *Neka je $A = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i\rangle$ kvadar u $\mathbb{R}^d$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji neprekinuta funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s kompaktnim nosačem takva da je $\|\chi_A - f\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon$.*

Dokaz. Dokaz dajemo za slučaj $d = 1$. Dokaz za općenit slučaj bit će očita generalizacija, suviše tehnička za zapisivanje.

Neka je, dakle, $A = [a, b\rangle$ kvadar i neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo pozitivan $\delta < \varepsilon$ i definirajmo funkciju f: ona je jednaka 0 izvan segmenta $[a-\delta, b+\delta]$, jednaka 1 na segmentu $[a, b]$, linearno raste od 0 do 1 na $[a-\delta, a]$ i linearno pada od 1 do 0 na $[b, b+\delta]$.

Očito se radi o neprekinutoj funkciji s kompaktnim nosačem za koju vrijedi

$$\|f - \chi_A\|_{\mathrm{L}^1} = \int |f - \chi_A| d\lambda = \delta < \varepsilon\,.$$

□

Neka je sada $\varepsilon > 0$ i $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Neka je $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, pri čemu su A_i kvadri, elementarna funkcija za koju je $\|f-g\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon/2$. Iz leme 2 slijedi da postoje neprekinute funkcije s kompaktnim nosačem $g_1, \ldots, g_n$ takve da je

$$\|\chi_{A_i} - g_i\|_{\mathrm{L}^1} < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}\,.$$

Tada je $h := \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n$ neprekinuta funkcija s kompaktnim nosačem za koju se računom sličnim kao i ranije vidi $\|f-h\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon$. □

8. Provjeriti da su sljedeći funkcionali (pozitivni) Radonovi integrali:

a) Za $x \in X$ definiramo $\delta_x\colon f \mapsto f(x)$ (Diracov integral).

Rješenje. Potrebno je pokazati da je δ_x pozitivan linearan funkcional na $\mathrm{C}_c(X;\mathbb{R})$. Neka su $f, g \in \mathrm{C}_c(X;\mathbb{R})$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\delta_x(f + \alpha g) = (f+\alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = \delta_x f + \alpha \delta_x g\,.$$

Nadalje, ako je $f \geqslant 0$, očito je $\delta_x f = f(x) \geqslant 0$. □

b) Za $X := [a, b]$ uzmimo $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ (Riemannov integral neprekinutih realnih funkcija).

Rješenje. Riemannov integral svakako jest linearan funkcional na $\mathrm{C}([a,b];\mathbb{R})$. Ako je $f \geqslant 0$, onda je svaka donja Darbouxova suma za f nenegativna pa je i Riemannov integral od f nenegativan. $\square$

c) Riemann-Stieltjesov integral na $[a,b]$.

Rješenje. Linearnost Riemann-Stieltjesovog integrala pokazana je u prošloj zadaći. Za pozitivnost je potreban oprez. Naime, ukoliko funkcija g s obzirom na koju integriramo nije neopadajuća, može se dogoditi da je integral funkcije f negativan, iako je $f \geqslant 0$. Primjerice, ako je $f := \mathbf{1}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dana s $g(x) := -x$, onda je $f \geqslant 0$ i $\int_a^b f(x)dg(x) = a - b < 0$.

Međutim, ako je g neopadajuća, a $f \geqslant 0$, onda je očito svaka Riemann-Stieltjesova suma nenegativna pa je i $\int_a^b f(x)dg(x) \geqslant 0$. $\square$

d) Riemannov i Riemann-Stieltjesov integral mogu se definirati i za funkcije iz $\mathrm{C}_c(\mathbb{R})$ (dobro definirano kao u (b) ili (c), jer definicija ne ovisi o izboru a i b čim je $\operatorname{supp} f \subseteq [a,b]$).

Rješenje. $\square$

9. Ako je X separabilan metrički prostor, a $\mathfrak{M} = \mathcal{B}_X$, onda konačnost na kompaktima (svojstvo (b)) povlači obje regularnosti (svojstva (c) i (d) Radonove mjere).

Rješenje. Uvedimo dodatnu pretpostavku da je X lokalno kompaktan i pokažimo da je tada svaki otvoren skup u X σ-kompaktan. Zbog separabilnosti X ima prebrojivu bazu topologije $\mathcal{B}$. Neka je U proizvoljan otvoren podskup od X. Za $x \in U$ neka je $K_x \subseteq U$ kompaktna okolina. Tada je $\operatorname{Int} K_x$ okolina od x koja je, s obzirom da je otvorena, unija elemenata iz $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{Int} K_x = \bigcup_{i \in I_x} B_i^x .$$

Tada očito vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} \bigcup_{i \in I_x} \operatorname{Cl} B_i^x .$$

S obzirom da je $\mathcal{B}$ prebrojiva baza, prethodna unija se reducira na prebrojivu uniju. Nadalje, svaki $\operatorname{Cl} B_i^x \subseteq K_x$ je zatvoren podskup kompaktnog skupa pa je i sam kompaktan.

Neka je sad U otvoren skup i neka je $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pri čemu su F_n kompaktni. Pokažimo da možemo postići da je $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ pri čemu, osim što su K_n kompaktni, vrijedi i $K_n \subseteq \operatorname{Int} K_{n+1}$. Naime, stavimo $K_1 := F_1$ i pretpostavimo da smo definirali $K_1, \ldots, K_n$. Za $x \in K_n$ neka je $K_x \subseteq U$ kompaktna okolina. Tada je $\{\operatorname{Int} K_x \mid x \in K_n\}$ otvoren pokrivač od K_n pa se reducira na konačan potpokrivač $\{\operatorname{Int} K_{x_1}, \ldots, \operatorname{Int} K_{x_m}\}$. Kompaktan skup $K_{n+1} := F_{n+1} \cup K_{x_1} \cup \ldots \cup K_{x_m}$ tada osigurava traženo svojstvo. U nastavku ćemo kod svakog prikaza otvorenog skupa kao unije niza kompakata (K_n) pretpostavljati da je $K_n \subseteq \operatorname{Int} K_{n+1}$.

Pretpostavimo da je μ mjera na $(X, \mathcal{B}_X)$ koja je konačna na kompaktima. Za otvoren skup $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ regularnost iznutra slijedi već iz same σ-kompaktnosti i neprekinutosti na rastuće nizove. Naime, vrijedi

$$\lim_n \mu K_n = \mu U .$$

Za regularnost izvana potreban nam je nešto jači „otrov". Prvo primijetimo da zbog konačnosti na kompaktima vrijedi $\mathrm{C}_c(X;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. (Naime, ako je $f \in \mathrm{C}_c(X;\mathbb{R})$ s nosačem K, onda je f omeđena na K, tj. postoji $M > 0$ tako da je $|f| \leqslant M\chi_K$.) Stoga je s $A(f) := \int_X f d\mu$ definiran

Radonov integral na $\mathrm{C}_c(X;\mathbb{R})$. Neka je ν Radonova mjera pridružena A prema Rieszovom teoremu reprezentacije.

Prvo nam je cilj pokazati da se μ i ν podudaraju na otvorenim skupovima. Naime, neka je U otvoren skup i neka je $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Koristeći Urysohnovu lemu za lokalno kompaktne Hausdorffove prostore (zadatak 13) induktivno za svaki $n \in \mathbb{N}$ nalazimo $f_n \in \mathrm{C}_c(X;[0,1])$ za koju je $\mathrm{supp} f_n \subseteq U$ i f_n je jednaka 1 na K_n i na $\bigcup_{j=1}^{n-1} \mathrm{supp} f_j$. Očito $f_n \nearrow \chi_U$ pa koristeći teorem o monotonoj konvergenciji zaključujemo

$$\mu(U) = \int_X \chi_U d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\nu = \int_X \chi_U d\nu = \nu(U)\,.$$

Primijetimo sada da je sam X σ-kompaktan pa je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Kako je $K_n \subseteq \mathsf{Int}\, K_{n+1}$, vrijedi i $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{Int}\, K_n$. Zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\nu(\mathsf{Int}\, K_n) = \mu(\mathsf{Int}\, K_n) \leqslant \mu K_n < \infty\,.$$

Naravno, tada je i

$$\nu\Big(\mathsf{Int}\, K_n \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathsf{Int}\, K_j\Big) < \infty\,,$$

pa je ν σ-konačna. To znači da je i proizvoljan $E \in \mathfrak{M}$ σ-konačan, tj. može se prikazati kao disjunktna unija $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ pri čemu je $\nu E_n < \infty$. Zbog regularnosti izvana, za $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji otvoren skup $U_n \supseteq E_n$ takav da je $\nu U_n < \nu E_n + \varepsilon \cdot 2^{-n-1}$. Tada je $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ otvoren skup za koji vrijedi $U \supseteq E$ i

$$\nu(U \backslash E) \leqslant \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \backslash E_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(U_n \backslash E_n) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Primjenom istog argumenta na cE zaključujemo da postoji otvoren skup $V \supseteq cE$ za koji vrijedi $\nu(V \backslash cE) < \varepsilon/2$. Tada je $F = cV$ zatvoren, $F \subseteq E$ i vrijedi

$$\nu(U \backslash F) = \nu(U \backslash E) + \nu(E \backslash F) = \nu(U \backslash E) + \nu(V \backslash cE) < \varepsilon\,.$$

Međutim, primijetimo da je $U \backslash F$ otvoren skup. Prema tome, vrijedi $\mu(U \backslash F) = \nu(U \backslash F) < \varepsilon$.

Ako je sada $\mu E = \infty$, onda svakako vrijedi

$$\mu E = \inf\{\mu V \mid V \in \tau(X), V \supseteq E\}\,.$$

Ako je pak $\mu E < \infty$, onda je i $\mu F \leqslant \mu E < \infty$ te

$$\mu U = \mu F + \mu(U \backslash F) < \mu E + \varepsilon\,.$$

Dakle, vrijedi regularnost izvana za μ. □

10. (**Regularnost iznutra za σ-konačne skupove**)

a) Pokazati da svojstvo regularnosti iznutra za Radonove mjere vrijedi i ako otvorene skupove zamijenimo izmjerivim skupovima konačne mjere; točnije, pokazati da vrijedi sljedeće:

$$(\forall E \in \mathfrak{M}) \quad \mu E < \infty \implies \mu E = \sup\{\mu K \mid K \subseteq E \ \&\ K \in \mathcal{K}\}\,.$$

Rješenje. Neka je E izmjeriv skup konačne mjere. Zbog monotonosti μ za svaki $K \in \mathcal{K}$, $K \subseteq E$ vrijedi $\mu K \leqslant \mu E$. Da bismo dokazali da je μE i supremum mjera takvih skupova, uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$.

Zbog regularnosti izvana, postoji otvoren $U \supseteq E$ takav da je $\mu U < \mu E + \varepsilon/4$. Dakle, $\mu(U \backslash E) < \varepsilon/4$. Nadalje, postoji otvoren $V \supseteq U \backslash E$ takav da je $\mu V < \mu(U \backslash E) + \varepsilon/4 < \varepsilon/2$.

Zbog regularnosti iznutra, za otvoren skup U postoji kompaktan skup $F \subseteq U$ takav da je $\mu F > \mu U - \varepsilon/2$. Dakle, $\mu(U \backslash F) < \varepsilon/2$.

Definirajmo $K := F \cap cV$. Lako se vidi da je $K \subseteq E$. Nadalje, K je zatvoren podskup kompakta F pa je i sam kompaktan. Vrijedi

$$\mu(E \backslash K) = \mu(E \cap (cF \cup V)) \leqslant \mu(U \backslash F) + \mu V < \varepsilon\,.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

b) Pokazati da tvrdnja vrijedi i za skup E koji je prebrojiva unija izmjerivih skupova konačne mjere.

Rješenje. Neka je $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, pri čemu su E_n izmjerivi skupovi konačne mjere. Ukoliko je $\mu E < \infty$, tvrdnja slijedi iz (a). Stoga pretpostavimo da je $\mu E = \infty$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (E_n) rastući niz skupova (ako nije, E_n zamijenimo s $E_1 \cup \ldots \cup E_n$, što je također izmjeriv skup konačne mjere). Zbog neprekinutosti mjere na rastuće nizove imamo $\lim_n \mu E_n = \mu E = \infty$. Prema tome, za proizvoljan $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu E_n > M$.

Primjenom (a) na E_n slijedi da postoji kompaktan skup $K \subseteq E_n$ takav da je $\mu K > M$. Dakle, postoji kompaktan podskup od E proizvoljno velike mjere. Time je tvrdnja dokazana. □

11. Pokazati da je konačna nenegativna mjera μ Radonova ako i samo ako vrijedi

$$(\forall E \in \mathfrak{M})(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathcal{K}(X))(\exists U \in \tau) \quad K \subseteq E \subseteq U \;\&\; \mu(U \backslash K) < \varepsilon\,.$$

Rješenje. Neka je μ konačna nenegativna mjera. Ako je μ Radonova, iz prethodnog zadatka slijedi da za $E \in \mathfrak{M}$ i $\varepsilon > 0$ postoje kompaktan $K \subseteq E$ i otvoren $U \supseteq E$ takvi da je

$$\mu U - \mu E < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad \mu E - \mu K < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zbrajanjem te dvije nejednakosti dobijemo $\mu(U \backslash K) < \varepsilon$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi zadani uvjet. Dodatno, pretpostavimo da je μ Borelova mjera (doista ne vidim kako izvesti to svojstvo iz zadanih pretpostavki). Kako je μ konačna, specijalno je konačna i na kompaktima. Nadalje, za izmjeriv skup E i $\varepsilon > 0$ postoje kompakt $K \subseteq E$ i otvoren skup $U \supseteq E$ za koje je $\mu(U \backslash K) < \varepsilon$. Kako je $\mu K \leqslant \mu E \leqslant \mu U < \infty$, zaključujemo

$$\mu U - \mu E = \mu(U \backslash E) \leqslant \mu(U \backslash K) < \varepsilon\,,$$
$$\mu E - \mu K = \mu(E \backslash K) \leqslant \mu(U \backslash K) < \varepsilon\,.$$

Slijede regularnost izvana i regularnost iznutra (čak za proizvoljne izmjerive skupove, pa specijalno za otvorene). □

12.*

13. (**Urysohnova lema za lokalno kompaktne Hausdorffove prostore**) Neka je kompakt K sadržan u otvorenom skupu U. Tada postoji $f \in \mathrm{C}(X;[0,1])$ i kompaktan skup $L \supseteq K$ takvi da je $f_{|K} = 1$ i $f_{|cL} = 0$.

Rješenje. Pokažimo prvo da postoji otvoren skup V koji je relativno kompaktan ($\mathsf{Cl}\, V$ je kompaktan) i za koji vrijedi

$$K \subseteq V \subseteq \mathsf{Cl}\, V \subseteq U\,.$$

Naime, kako je X lokalno kompaktan, za svaki $x \in K$ postoji kompaktna okolina $F_x \subseteq U$. Označimo s $U_x := \mathsf{Int}\, F_x$. Tada je $\{U_x \mid x \in K\}$ otvoren pokrivač kompakta K pa se reducira na konačan potpokrivač $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Označimo s $V := U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Tada je

$$\mathsf{Cl}\, V \subseteq F_{x_1} \cup \ldots \cup F_{x_n} \subseteq U\,.$$

Dakle, $\mathsf{Cl}\, V$ je zatvoren podskup kompaktnog skupa pa je i sam kompaktan, te V zadovoljava tražene uvjete.

Stavimo sada $L := \mathsf{Cl}\, V$. L je kompaktan Hausdorffov prostor pa je normalan (tu tvrdnju sam dokazao u jednom od zadataka iz prošle zadaće). Stoga prema Urysohnovoj lemi [4, str. 102] postoji $f \in \mathrm{C}(L;[0,1])$ takva da je $f_{|K} = 1$ i $f_{|cV} = 0$ (jasno, gledamo komplement skupa V u L). Funkciju f proširimo nulom na cL tako da bude definirana na čitavom X.

Neka je $E \subseteq [0,1]$ zatvoren skup. Ako $0 \notin E$, onda je $f^{\leftarrow}(E) = f_{|L}^{\leftarrow}(E)$. Ako je pak $0 \in E$, onda je $f^{\leftarrow}(E) = f_{|L}^{\leftarrow}(E) \cup cV$ (ovaj put komplement skupa V u X). U oba slučaja $f^{\leftarrow}(E)$ je zatvoren u X. Prema tome, f je neprekinuta. □

14.* (**Upotpunjenje Radonove mjere**)

15. Neka je μ Radonova mjera, a f nenegativna izmjeriva funkcija na X. Pokazati da je tada s $\mu_f E := \int_E f d\mu$ definirana Radonova mjera na X ako je:

a) f neprekinuta, ili

b) f Borelova, a μ_f konačna na kompaktima.

Posebno, ako je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ realna (ili kompleksna), onda je μ_f realna (kompleksna) Radonova mjera na X.

Rješenje. □

16.*

17.*

18.*

19.*

20.*

21.* (**Hausdorffova vanjska mjera**)

Literatura

[1] N. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, PMF–MO, Zagreb, 2001.

[2] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, 2. izdanje, John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi dio*, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[4] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970.