# Treća zadaća iz Realne i funkcionalne analize

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

20. listopada 2010.

**1.** Neka je $(X, \mu)$ prostor konačne mjere, te za kompleksnu izmjerivu funkciju $f$ na $X$ definirajmo

$$\rho(f) := \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \, .$$

Tada je $(f, g) \mapsto \rho(f-g)$ metrika na vektorskom prostoru kompleksnih izmjerivih funkcija na $X$ (uz identifikaciju skoro svuda jednakih funkcija), te je konvergencija u toj metrici upravo konvergencija u mjeri. Pokazati da je ta metrika u skladu s vektorskom strukturom. Je li taj prostor potpun? Je li Fréchetov?

***Rješenje.*** Neka je $M := \mu(X) < \infty$. Lako se vidi da za svaku izmjerivu funkciju $f$ vrijedi $0 \leqslant \rho(f) < M$ i da $f = f'$ skoro svuda na $X$ povlači $\rho(f) = \rho(f')$. Slijedi da je $(f, g) \mapsto \rho(f-g)$ dobro definirana nenegativna realna funkcija koja je očito simetrična.

Pretpostavimo da je $\rho(f-g) = 0$. Tada je funkcija

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = 0 \quad (ss) \, ,$$

a onda su očito $|f-g|$ i $f-g$ skoro svuda jednake 0, tj. $f$ i $g$ su skoro svuda jednake.

Nejednakost trokuta jednostavno slijedi iz činjenice da za kompleksne brojeve $w$ i $z$ vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|w+z|}{1+|w+z|} &= 1 - \frac{1}{1+|w+z|} \leqslant 1 - \frac{1}{1+|w|+|z|} \\ &= \frac{|w|}{1+|w|+|z|} + \frac{|z|}{1+|w|+|z|} \\ &\leqslant \frac{|w|}{1+|w|} + \frac{|z|}{1+|z|} \, . \end{aligned}$$

Naime, stavljanjem $w = f(x) - g(x)$ i $z = g(x) - h(x)$ vidi se da za izmjerive funkcije $f, g, h$ vrijedi

$$\frac{|f-h|}{1+|f-h|} \leqslant \frac{|f-g|}{1+|f-g|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|}$$

pa zbog monotonosti i aditivnosti integrala slijedi $\rho(f-h) \leqslant \rho(f-g) + \rho(g-h)$. Time smo pokazali da je $(f, g) \mapsto \rho(f-g)$ doista metrika.

Pretpostavimo da je $(f_n)$ niz izmjerivih funkcija koji u toj metrici konvergira izmjerivoj funkciji $f$ i pokažimo da tada $f_n \longrightarrow f$ i u mjeri. Neka su $\varepsilon, \delta > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(f_n - f) = \int \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|} d\mu < \frac{\varepsilon\delta}{1+\varepsilon} \, .$$

Koristeći Markovljevu nejednakost nalazimo da za $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\varepsilon, \infty]) &= \mu\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}^{\leftarrow}\left[\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \infty\right]\right) \\ &\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \\ &< \delta\,.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\lim_n \mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\varepsilon, \infty]) = 0\,.$$

S druge strane, pretpostavimo da $f_n \longrightarrow f$ u mjeri i dokažimo da $f_n \longrightarrow f$ i u metrici. Neka je $\varepsilon > 0$. Prisjetimo se, mjera $\mu$ je konačna i označili smo $M = \mu(X)$. Ako je $\varepsilon \geqslant 2M$, onda je svakako $\rho(f_n - f) < \varepsilon$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo stoga da je $\varepsilon < 2M$ i uvedimo oznaku $\delta := \varepsilon/(2M - \varepsilon)$. Tada je

$$\lim_n \mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\delta, \infty]) = 0$$

pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\delta, \infty]) < M\delta\,.$$

Zaključujemo da $n \geqslant n_0$ povlači

$$\begin{aligned}\rho(f_n - f) &= \int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu = \int_{|f_n - f|^{\leftarrow}[\delta,\infty]} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu + \int_{|f_n - f|^{\leftarrow}[0,\delta\rangle} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \\ &\leqslant \mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\delta, \infty]) + \frac{\delta}{1+\delta}\mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[0, \delta\rangle) \\ &= \frac{M\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\delta, \infty]) < \frac{2M\delta}{1+\delta} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.

Na sličan način se pokaže da je niz $(f_n)$ Cauchyjev u mjeri ako i samo ako je Cauchyjev u metrici. Potpunost promatranog prostora je stoga posljedica Tm. 6. [1, str. 90].

Pokažimo usklađenost metrike s vektorskom strukturom. Neprekinutost zbrajanja je trivijalna posljedica nejednakosti trokuta. Da bismo dokazali neprekinutost množenja skalarom, pretpostavimo da niz $(\lambda_n, f_n)$ uređenih parova kompleksnog broja i kompleksne izmjerive funkcije konvergira prema $(\lambda, f)$ u produktnom prostoru. Pokazat ćemo da tada niz $(\lambda_n f_n)$ konvergira u mjeri prema $\lambda f$ i iskoristiti dokazanu ekvivalenciju s konvergencijom u metrici.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prvo uočimo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\lambda_n f_n(x) - \lambda f(x)| &= |\lambda_n f_n(x) - \lambda_n f(x) + \lambda_n f(x) - \lambda f(x)| \\ &\leqslant |\lambda_n||f_n(x) - f(x)| + |\lambda_n - \lambda||f(x)|\,.\end{aligned}$$

Nadalje, ako je

$$|\lambda_n||f_n(x) - f(x)| + |\lambda_n - \lambda||f(x)| \geqslant \varepsilon\,,$$

onda je barem jedan od sumanada s lijeve strane veći ili jednak $\varepsilon/2$. Slijedi

$$\mu(|\lambda_n f_n - \lambda f|^{\leftarrow}[\varepsilon, \infty]) \leqslant \mu(|\lambda_n||f_n - f|^{\leftarrow}[\varepsilon/2, \infty]) + \mu(|\lambda_n - \lambda||f|^{\leftarrow}[\varepsilon/2, \infty])\,. \tag{1}$$

Neka je $\delta > 0$. Budući da je niz $(\lambda_n)$ konvergentan, on je ograničen pa postoji $T > 0$ takav da je $|\lambda_n| < T$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada zbog $f_n \longrightarrow f$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geqslant n_1 \quad \Longrightarrow \quad \mu(|\lambda_n||f_n - f|^{\leftarrow}[\varepsilon/2, \infty]) \leqslant \mu(|f_n - f|^{\leftarrow}[\varepsilon/(2T), \infty]) < \delta/2\,. \tag{2}$$

Promotrimo skupove $|f|^{\leftarrow}[n,\infty]$ za $n \in \mathbb{N}$. Radi se o padajućem nizu skupova, a kako je $\mu(|f|^{\leftarrow}[1,\infty]) < \infty$ (u prostoru smo konačne mjere), slijedi

$$\lim_n \mu(|f|^{\leftarrow}[n,\infty]) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} |f|^{\leftarrow}[n,\infty]\Big) = \mu(\emptyset) = 0\,.$$

Stoga postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(|f|^{\leftarrow}[N,\infty]) < \delta/2$. Sada zbog $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/(2N)$ za $n \geqslant n_2$. Zaključujemo

$$n \geqslant n_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(|\lambda_n - \lambda||f|^{\leftarrow}[\varepsilon/2,\infty]) \leqslant \mu(|f|^{\leftarrow}[N,\infty]) < \delta/2\,. \tag{3}$$

Stavljanjem $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ iz (1), (2) i (3) zaključujemo da vrijedi

$$n \geqslant n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(|\lambda_n f_n - \lambda f|^{\leftarrow}[\varepsilon,\infty]) < \delta\,.$$

Prema tome,

$$\lim_n \mu(|\lambda_n f_n - \lambda f|^{\leftarrow}[\varepsilon,\infty]) = 0\,,$$

tj. niz $(\lambda_n f_n)$ konvergira prema $\lambda f$.

Na kraju, ostaje odgovoriti je li promatrani prostor Fréchetov. Ako je $X$ prostor bez atoma, na promatranom prostoru nema netrivijalnih neprekinutih linearnih funkcionala (v. zad. 4). S druge strane, Hahn-Banachov teorem osigurava postojanje mnoštva neprekinutih linearnih funkcionala na lokalno konveksnim prostorima. Prema tome, promatrani prostor nije lokalno konveksan, a onda ni Fréchetov. □

**2.***

**3.** Neka je $l^2$ prostor kvadratno sumabilnih redova ($\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^2 < \infty$), sa standardnom bazom $(e_n; n \in \mathbb{N})$. Pokazati da je skup $A := \{e_m + me_n : m < n\}$ neomeđen u $l^2$, da je $0 \in \mathsf{Cl}_{sl}A$, ali da ne postoji niz u $A$ koji konvergira k 0. Drugim riječima, nizovi ne opisuju slabu topologiju na $l^2$ (zbog neomeđenosti; na omeđenim podskupovima nizovi u potpunosti opisuju slabu topologiju).

***Rješenje.*** Da bismo pokazali neomeđenost, promotrimo $e_1 + e_n$ i $e_n + ne_{n+1}$ za $n > 1$:

$$d(e_1 + e_n, e_n + ne_{n+1}) = \sqrt{\sum_{k\geqslant 1}(\delta_{k1} - n\delta_{k,n+1})^2} = \sqrt{1+n^2} > n\,.$$

Prema tome, skup $A$ je neomeđen.

Nadalje, pokazat ćemo da svaka otvorena okolina $\mathbf{0}$ (u slaboj topologiji) siječe skup $A$. Budući da je dovoljno provjeru napraviti za otvorene okoline iz baze topologije, pretpostavimo da je

$$\mathbf{0} \in U = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{\leftarrow}(U_i)\,,$$

pri čemu su $f_i$ omeđeni linearni funkcionali, a $U_i$ otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Tada za svaki $i$ vrijedi

$$\langle f_i, \mathbf{0}\rangle = 0 \in U_i$$

pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_i\,.$$

Prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji [1, str. 110] svaki $f_i$ je reprezentiran nekim $u^i = \sum_j u^i_j \in l^2$. Iz nužnog uvjeta za konvergenciju reda slijedi da za svaki $i$ postoji $m_i \in \mathbb{N}$ takav da

$$j \geqslant m_i \qquad \Longrightarrow \qquad |u^i_j|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \qquad \text{tj. } |u^i_j| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stavimo $m := \max\{m_1, \ldots, m_k\}$. Tada za svaki $i$ postoji $n_i \in \mathbb{N}$ takav da

$$j \geqslant n_i \qquad \Longrightarrow \qquad |u^i_j|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4m^2}, \qquad \text{tj. } |u^i_j| < \frac{\varepsilon}{2m}\,.$$

Stavimo $n := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Konačno, vrijedi

$$\big|\langle f_i, e_m + me_n\rangle\big| = \big|\langle e_m + me_n \,|\, u^i\rangle\big| = |\overline{u^i_m} + m\overline{u^i_n}| \leqslant |u^i_m| + m|u^i_n| < \varepsilon\,.$$

Zaključujemo da je $e_m + me_n \in U$ pa je $U \cap A \neq \emptyset$, tj. $\mathbf{0} \in \mathsf{Cl}_{sl} A$.

Ostaje pokazati da nijedan niz u $A$ ne konvergira u slaboj topologiji k $\mathbf{0}$. Pa neka je $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz te neka je $a_k = e_{m_k} + m_k e_{n_k}$. Poslužit ćemo se karakterizacijom slabe konvergencije koja je dana u Lm. 3. [1, str. 116], tj. njenom modifikacijom za Hilbertove prostore:

$$a_k \rightharpoonup \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall y \in l^2)\ \langle a_k \mid y\rangle \longrightarrow 0\,.$$

Dovoljno je, dakle, pronaći $y \in l^2$ za koji niz $\big(\langle a_k \mid y\rangle\big)$ ne konvergira k 0.

Ukoliko je niz $(m_k)$ neomeđen, on ima strogo rastući podniz $(m_{k_j})$. U isto vrijeme, $(n_{k_j})$ je neomeđen zbog $m_{k_j} < n_{k_j}$ pa postoji njegov strogo rastući podniz $(n_{k_{j_i}})$. Stavimo

$$y = \sum_i \frac{1}{m_{k_{j_i}}}\, e_{n_{k_{j_i}}}\,.$$

Evidentno je $y \in l^2$ i vrijedi

$$\langle a_{k_{j_i}} \mid y\rangle = \langle e_{m_{k_{j_i}}} + m_{k_{j_i}} e_{n_{k_{j_i}}} \mid y\rangle = \langle e_{m_{k_{j_i}}} \mid y\rangle + 1 \geqslant 1\,.$$

Ako je pak $(m_k)$ omeđen, on ima konstantan podniz $(m_{k_j})$. Stavimo

$$y = e_{m_{k_1}}\,.$$

Tada je $y \in l^2$ i vrijedi

$$\langle a_{k_j} \mid y\rangle = \langle e_{m_{k_1}} + m_{k_1} e_{n_{k_j}} \mid y\rangle = 1 + \langle m_{k_1} e_{n_{k_j}} \mid y\rangle \geqslant 1\,.$$

U oba slučaja $\big(\langle a_k \mid y\rangle\big)$ ima podniz koji ne konvergira k 0 pa ni čitav niz ne konvergira k 0. □

**4.** Hahn-Banachov teorem na lokalno konveksnim prostorima daje postojanje mnoštva neprekinutih linearnih funkcionala. Ukoliko prostor nije lokalno konveksan, onda se može dogoditi da njegov dual sadrži samo nulu.

Zaista, neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor konačne mjere bez atoma. Tada su prostor klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija na $X$ s topologijom konvergencije u mjeri (v. Zadatak 1), odnosno $\mathrm{L}^p(X)$ za $p \in \langle 0, 1\rangle$, primjeri metrizabilnih topoloških vektorskih prostora na kojima nema netrivijalnih neprekinutih linearnih funkcionala. [Naputak: v. [6, str. 117]]

**5.***

**6.***

**7.** Neka je $0 < p < q \leqslant \infty$. Tada je $\mathrm{L}^p \nsubseteq \mathrm{L}^q$ ako i samo ako $X$ sadrži skupove po volji male pozitivne mjere. Obratno, $\mathrm{L}^q \nsubseteq \mathrm{L}^p$ ako i samo ako $X$ sadrži skupove po volji velike konačne mjere.

[Naputak: Za obratnu implikaciju u prvom slučaju postoji niz disjunktnih izmjerivih skupova $(A_n)$ takvih da je $0 < \mu(A_n) \leqslant 2^{-n}$; odnosno $1 \leqslant \mu(A_n) < \infty$ u drugom slučaju. Protuprimjer je $f := \sum a_n \chi_{A_n}$ za pogodan izbor konstanti $a_n$.]

***Rješenje.*** (i) Pretpostavimo prvo $\mathrm{L}^p \nsubseteq \mathrm{L}^q$ i neka je $f \in \mathrm{L}^p$, $f \notin \mathrm{L}^q$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\lambda_\varepsilon$ takav da je

$$\lambda_\varepsilon > \varepsilon^{-1/p} \|f\|_{\mathrm{L}^p} .$$

Uvedimo oznaku $E_\varepsilon := |f|^{\leftarrow}[\lambda_\varepsilon, \infty]$. Tada iz Markovljeve nejednakosti zaključujemo

$$\mu(E_\varepsilon) = \mu\big((|f|^p)^{\leftarrow}[\lambda_\varepsilon^p, \infty]\big) \leqslant \frac{1}{\lambda_\varepsilon^p} \int_X |f|^p d\mu < \varepsilon .$$

Ostaje pokazati da je $\mu(E_\varepsilon) > 0$. Pretpostavimo da nije tako, tj. da je $\mu(E_\varepsilon) = 0$. U slučaju da je $q = \infty$ odmah dolazimo do kontradikcije jer je evidentno $\|f\|_{L^\infty} \leqslant \lambda_\varepsilon < \infty$. U slučaju da je $q < \infty$ vrijedi

$$\int_X |f|^q d\mu = \int_{cE_\varepsilon} |f|^{q-p} |f|^p d\mu \leqslant \int_{cE_\varepsilon} \lambda_\varepsilon^{q-p} |f|^p d\mu = \lambda_\varepsilon^{q-p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p < \infty ,$$

što povlači $f \in \mathrm{L}^q$, tj. opet kontradikciju.

Za obratnu implikaciju pretpostavimo da $X$ sadrži skupove po volji male pozitivne mjere. Tada postoji niz skupova $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $0 < \mu(B'_n) < 2^{-n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ono što prvo želimo pokazati je da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su skupovi u nizu međusobno disjunktni.

Primijetimo da uobičajen način konstrukcije disjunktnog niza ($B_n := B'_n \setminus \bigcup_{1\leqslant i<n} B'_i$) ne prolazi jer skupovi $B_n$ mogu biti mjere nula. Npr. ako je polazni niz padajući, u novom nizu je samo prvi element neprazan! Stoga provodimo nešto sofisticiraniju konstrukciju. Uvedimo oznaku:

$$B := \limsup_n B'_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} B'_n .$$

Budući da je $m \mapsto \bigcup_{n\geqslant m} B'_n$ padajući niz skupova i vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} B'_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(B'_n) \leqslant 1 < \infty ,$$

zbog neprekinutosti mjere na padajuće nizove vrijedi

$$\mu(B) = \lim_m \mu\Big(\bigcup_{n\geqslant m} B'_n\Big) \leqslant \lim_m \sum_{n\geqslant m} 2^{-n} = 0 .$$

Prema tome, $\mu(B) = 0$, a onda uz oznaku $B_n := B'_n \setminus B$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mu(B_n) = \mu(B'_n)$. Niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima svojstvo da se svaki $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ nalazi u najviše konačno mnogo skupova $B_n$.

Sada definiramo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$A_n := B_n \Big\backslash \bigcup_{m>n} B_m .$$

Time smo dobili niz međusobno disjunktnih skupova za koji vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \,.$$

Netrivijalna inkluzija vrijedi zbog spomenutog svojstva niza $(B_n)$: ako je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, postoji najveći $n$ takav da je $x \in B_n$. No tada je $x \in A_n$.

Za niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ još uvijek ne možemo tvrditi da se sastoji od skupova pozitivne mjere, međutim, nismo daleko od toga: on ima podniz koji se sastoji od skupova pozitivne mjere. U suprotnom bi postojao $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(A_n) = 0$ za $n \geqslant n_0$. No to bi vodilo u kontradikciju:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{1\leqslant n<n_0} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\geqslant n_0} B_n\Big) \\ &< \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\geqslant n_0} B_n\Big) + \mu\Big(\bigcup_{n\geqslant n_0} B_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big).\end{aligned}$$

Dakle, postoji podniz $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi $0 < \mu(A_{n_k}) < 2^{-n_k} \leqslant 2^{-k}$ i koji se sastoji od međusobno disjunktnih skupova. Nadalje taj niz označavamo s $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$a_n := \begin{cases} \mu(A_n)^{-1/(2p)}, & q = \infty\,, \\ \mu(A_n)^{-2/(p+q)}, & q < \infty\,. \end{cases}$$

Nadalje, definiramo $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n}$. Očito vrijedi $|f| = f$, a lako se vidi da zbog disjunktnosti skupova $A_n$ vrijedi

$$f^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^p \chi_{A_n} \,.$$

U slučaju $q = \infty$ slijedi

$$\int |f|^p d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^p \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^p \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)^{1/2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n/2} < \infty\,,$$

a u slučaju $q < \infty$ slijedi

$$\int |f|^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)^{(q-p)/(p+q)} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n(q-p)/(p+q)} < \infty$$

jer je i $2^{-1/2} < 1$ i $2^{-(q-p)/(p+q)} < 1$. Svakako je onda $f \in \mathrm{L}^p$.

S druge strane, u slučaju $q < \infty$ vrijedi

$$\int |f|^q d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)^{(p-q)/(p+q)} \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{n(q-p)/(p+q)} = \infty$$

jer je $2^{(q-p)/(p+q)} > 1$. Stoga $f \notin \mathrm{L}^q$.

Konačno, u slučaju $q = \infty$ za svaki $C > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{n/(2p)} > C$. Za $x \in A_n$ tada vrijedi

$$f(x) = a_n = \mu(A_n)^{-1/(2p)} > 2^{n/(2p)} > C\,.$$

To znači da je $A_n \subseteq f^{\leftarrow}\langle C, \infty\rangle$, što povlači $\mu\big(f^{\leftarrow}\langle C, \infty\rangle\big) \geqslant \mu(A_n) > 0$. Zaključujemo $f \notin \mathrm{L}^q$.

(ii) Pretpostavimo sada $\mathrm{L}^q \nsubseteq \mathrm{L}^p$ i neka je $f \in \mathrm{L}^q$, $f \notin \mathrm{L}^p$. Promotrimo skupove

$$E_n := |f|^{\leftarrow}\langle n^{-1}, \infty\rangle\,.$$

Ako je $q < \infty$, iz Markovljeve nejednakosti slijedi

$$\mu(E_n) = \mu\big((|f|^q)^{\leftarrow}\langle n^{-q}, \infty\rangle\big) \leqslant n^q \int |f|^q d\mu = n^q \|f\|_{\mathrm{L}^q}^q < \infty\,.$$

Pretpostavimo da postoji $M > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mu(E_n) \leqslant M$. Budući da je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova, vrijedi

$$\mu(X) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_n \mu(E_n) \leqslant M\,.$$

Koristeći Hölderovu nejednakost, zaključujemo

$$\int_X |f|^p d\mu \leqslant \||f|^p\|_{\mathrm{L}^{q/p}} \|1\|_{\mathrm{L}^{q/(q-p)}} = \|f\|_{\mathrm{L}^q}^p \mu(X)^{(q-p)/q} < \infty\,,$$

što je kontradikcija. Prema tome, skupovi $E_n$ su po volji velike konačne mjere.

Ako je pak $q = \infty$, možemo pogledati primjer prostora $\mathbb{R}$ s Lebesgueovom mjerom i konstantnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Tada je $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1$, tj. $f \in \mathrm{L}^\infty$, i za svaki $p < \infty$ je $f \notin \mathrm{L}^p$. Međutim, ako pogledamo skupove $E_n$, vidimo da je $\mu(E_1) = 0$ te $\mu(E_n) = \infty$ za $n > 1$. Štoviše, za svaki $\lambda \geqslant 1$ je $\mu\big(|f|^{\leftarrow}\langle\lambda, \infty\rangle\big) = 0$, dok za $0 \leqslant \lambda < 1$ vrijedi $\mu\big(|f|^{\leftarrow}\langle\lambda, \infty\rangle\big) = \infty$. Iako to nije kontraprimjer za tvrdnju, indikator je da nam u ovom slučaju informacija $f \in \mathrm{L}^q$, $f \notin \mathrm{L}^p$ možda nije dovoljna da ustanovimo postojanje skupova proizvoljno velike konačne mjere.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Pretpostavimo da $X$ sadrži skupove po volji velike konačne mjere. Tada je zasigurno $\mu(X) = \infty$. Neka je $A \subseteq X$ podskup konačne mjere. Tada i $X \setminus A$ sadrži skupove po volji velike konačne mjere. Naime, za $M > 0$ postoji $B \subseteq X$ takav da je $M + \mu(A) < \mu(B) < \infty$. Slijedi da je $B \setminus A \subseteq X \setminus A$ i

$$M < \mu(B) - \mu(A) \leqslant \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B \setminus A) < \infty\,.$$

Dokazanu činjenicu iskoristimo da definiramo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $A_1 \subseteq X$ odaberemo tako da vrijedi $2 < \mu(A_1) < \infty$.
- Pretpostavimo da smo odabrali $A_1, \ldots, A_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada odabiremo

  $$A_{n+1} \subseteq X \Big\backslash \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i$$

  za koji vrijedi $2^{n+1} < \mu(A_{n+1}) < \infty$.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz međusobno disjunktnih skupova za koje vrijedi $2^n < \mu(A_n) < \infty$.

Dalje postupamo slično kao u (i). Čak štoviše, $a_n$ definiramo na potpuno isti način:

$$a_n := \begin{cases} \mu(A_n)^{-1/(2p)}\,, & q = \infty\,, \\ \mu(A_n)^{-2/(p+q)}\,, & q < \infty\,. \end{cases}$$

Promatramo istu funkciju $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n}$. Lako se vidi da $p$ i $q$ zbog nejednakosti $\mu(A_n) > 2^n$ igraju obrnute uloge. Stoga je $f \in \mathrm{L}^q$ i $f \notin \mathrm{L}^p$.

Za primjer demonstriramo $f \in \mathrm{L}^q$ u slučaju $q = \infty$. Vrijedi

$$a_n = \mu(A_n)^{-1/(2p)} < 2^{-n/(2p)} \leqslant 2^{-1/(2p)}\,.$$

Stoga je $f(x) < 2^{-1/(2p)}$ za svaki $x \in X$, a onda je i $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} < 2^{-1/(2p)} < \infty$. $\square$

**8.**

**9.**

**10.** Ako je $f \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^\infty$ za neki $p < \infty$, tako da je $f \in \mathrm{L}^q$ za svaki $q \in [p, \infty]$, onda je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} = \lim_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q}\,.$$

***Rješenje.*** Neka je $p < q < \infty$. Iz interpolacijske nejednakosti (Braslavov hint; vidjeti [1, str. 164], ili [2, str. 185] za elementarniji dokaz) slijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{p/q} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1-p/q}\,.$$

Prema tome, zaključujemo

$$\limsup_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \limsup_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{p/q} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1-p/q} = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\,.$$

S druge strane, za proizvoljan $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$ i uz oznaku $E := |f|^{\leftarrow}\langle (1-\varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}, \infty\rangle$ vrijedi $\mu(E) > 0$. Zaključujemo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^q}^q = \int_X |f|^q d\mu \geqslant \int_E |f|^q d\mu \geqslant (1-\varepsilon)^q \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}^q \mu(E)\,.$$

Vađenjem $q$-tog korijena i prelaskom na limes inferior dobijemo

$$\liminf_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q} \geqslant \liminf_{q \nearrow \infty} (1-\varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \mu(E)^{1/q} = (1-\varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\,.$$

No, $\varepsilon$ je proizvoljan pa je

$$\liminf_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q} \geqslant \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\,.$$

Sve zajedno, vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \liminf_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \limsup_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\,.$$

Prema tome, umjesto nejednakosti svuda mogu stajati jednakosti pa postoji $\lim_{q \nearrow \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^q}$ i jednak je $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$. □

# Literatura

[1] N. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, PMF–MO, Zagreb, 2001.

[2] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, 2. izdanje, John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza u $n$-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi dio*, 4. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[4] L. Narici, E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[5] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970.

[6] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6. izdanje, Springer-Verlang, 1980.