Prva zadaća iz Teorije, metodike i povijesti infinitezimalnih računa

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

13. siječnja 2011.

1. Obraditi na sve načine $\sqrt{2n+1}$ (najmanji koji još nismo) kod nesumjerljivosti/verižnih razlomaka/antifereze.

Rješenje. Biramo $n = 5$. „Modernom” antiferezom u prvom koraku vrijedi $\lfloor\sqrt{11}\rfloor = 3$ pa je

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{1/(\sqrt{11}-3)}.$$

Nadalje, $\lfloor 1/(\sqrt{11}-3)\rfloor = 3$ pa dalje vrijedi

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2/(\sqrt{11}-3)}}.$$

U sljedećem koraku dolazimo do ponavljajuće situacije:

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1/(\sqrt{11}-3)}}}.$$

Zaključujemo da je $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$.

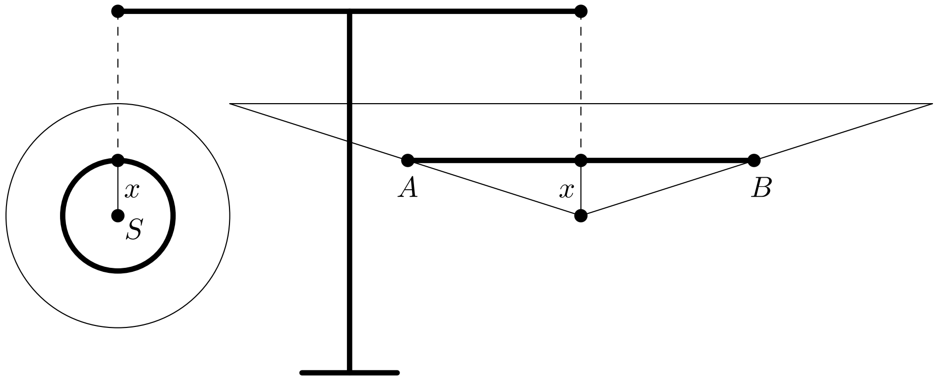
Parmenidov algoritam daje sljedeće:

$$\sqrt{11}\ \begin{array}{c||ccc|ccc|cccccc|ccc|cc}
\frac{1}{0} & & & & \frac{4}{1} & \frac{7}{2} & \frac{10}{3} & & & & & & & \frac{73}{22} & \frac{136}{41} & \frac{199}{60} & & \\ \hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & & & & \frac{13}{4} & \frac{23}{7} & \frac{33}{10} & \frac{43}{13} & \frac{53}{16} & \frac{63}{19} & & & & \frac{262}{79} & \cdots
\end{array}$$

Broj razlomaka u skupinama ispod/iznad crte prati uzorak $[3, \overline{3, 6}]$, kao što i očekujemo. □

2. Vaganjem ustanoviti površinu kruga. [Uputa: Uzeti krug centriran na nekoj udaljenosti, a na drugoj strani pravokutni trokut s bazom $2r\pi$.]

Rješenje. Na jednu stranu vage stavljamo kružni vijenac (unutarnjeg) radijusa $x \in [0, r]$ i širine dx. Na drugu stranu stavljamo segment AB duljine $2x\pi$ i širine dx jednakokračnog trokuta s bazom duljine $2r\pi$ i visinom r. (Vidi sliku 1.) Budući da su i vijenac i segment iste površine $2x\pi dx$, tj. iste „mase”, vaga je u ravnoteži.



Slika 1: Vaganje kruga i trokuta

Kako je s jedne strane površina (masa) kruga jednaka sumi površina (masa) kružnih vijenaca, a s druge strane površina (masa) trokuta jednaka sumi površina (masa) segmenata AB za $x \in [0, r]$, zaključujemo da su površine (mase) likova jednake. Površinu trokuta znamo izračunati; ona iznosi $r^2\pi$. Slijedi da je i površina kruga $r^2\pi$. □

3. Sumirati $\sum x^4 / \sum a^4$ kao Cavalieri. [Rezultat: 1/5.]

Rješenje. Računanje $\sum x^n / \sum a^n$ na način pokazan na predavanju čini se da ima jedan inherentan problem u slučaju parnog n. Promotrimo što se događa u slučaju $n = 4$. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\sum a^4 &= \sum (x+y)^4 = 2\sum x^4 + 8\sum x^3 y + 6\sum x^2 y^2 \\
\sum a^4 &= a\sum (x+y)^3 = 2a\sum x^3 + 6a\sum x^2 y \\
\sum a^4 &= a^2\sum (x+y)^2 = 2a^2\sum x^2 + 2a^2\sum xy
\end{aligned}$$

Pritom smo koristili Cavalierijev princip za grupiranje članova oblika $\sum x^k y^l$ i $\sum x^l y^k$. U drugom i trećem retku za neke članove možemo koristiti rezultate poznate od ranije (za $n = 3$ i $n = 2$), primjerice

$$\sum x^3 = \frac{1}{4}\sum a^3 \quad \text{i} \quad \sum x^2 y = \frac{1}{2}\sum a^3 .$$

Ostale pak razvijemo i grupiramo koristeći $a = x + y$ i Cavalierijev princip kako bismo dobili članove oblika $\sum x^k y^l$ pri čemu je $k \geqslant l$ i $k + l = n$. Na taj način dobivamo sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama

$$\sum x^4 , \ \sum x^3 y , \ \sum x^2 y^2$$

koje želimo izraziti pomoću

$$\sum a^4 .$$

(Nas zapravo samo zanima nepoznanica $\sum x^4$.) Međutim, kako god odabrali grupiranje i korištenje otprije poznatih rezultata, dobivamo singularan sustav za koji ne možemo dobiti jedinstveno rješenje.

Ovaj problem ne javlja se u slučajevima $n = 3$ i $n = 5$. Za $n = 5$ nakon grupiranja i uvažavanja rezultata $\sum x^4 = (1/5)\sum a^4$ (za koji recimo da ga otprije znamo) dobijemo sustav

$$\begin{aligned}\sum a^5 &= 2\sum x^5 + 10\sum x^4y + 20\sum x^3y^2\\ \frac{3}{5}\sum a^5 &= 8\sum x^4y + 20\sum x^3y^2\\ \frac{1}{2}\sum a^5 &= 6\sum x^4y + 18\sum x^3y^2\end{aligned}$$

koji je regularan i čijim se rješavanjem nalazi

$$\sum x^5 = \frac{1}{6}\sum a^5 .$$

Zašto se točno javlja problem singularnosti i kako ga zaobići još nažalost nisam uspio shvatiti. □

4. Glavno transmutacijsko pravilo (iz [1]).

Rješenje. Zapisano modernom notacijom Leibnizovo transmutacijsko pravilo glasi:

$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2}\Big(xy|_a^b + \int_a^b z dx\Big) ,$$

pri čemu je

$$z = y - x\frac{dy}{dx} .$$

Uvrštavanjem z-a i sređivanjem dolazimo do standardne formule za parcijalnu integraciju koja se dokazuje na svakom početnom kursu matematičke analize.

Međutim, iako je i navedenu notaciju uveo Leibniz, samo pravilo je starije i potječe iz čisto geometrijskog konteksta. Njime je Leibniz izražavao površinu ispod jedne krivulje pomoću površine ispod druge, *transmutirane* krivulje. Transmutiranu krivulju Leibniz je dobio posredstvom tangenti početne krivulje, a vezu između površina dobio je uočavanjem sličnosti između infinitezimalnog *karakterističnog trokuta* početne krivulje i određenog većeg trokuta.

Pokušajmo ilustrirati Leibnizove ideje na krivulji koja predstavlja četvrtinu kružnice radijusa 1 s centrom u točki $(1, 0)$. (Vidi sliku 2.)

Označimo s C neku točku na krivulji. Njena apscisa neka je x, a ordinata y. Napravimo infinitezimalni pomak na krivulji prema točki C'. Razliku u ordinatama u odnosu na točku C označimo s dy, a razliku u apscisama dx. Mali pravokutan trokut $CC'E$ zovemo *karakteristični trokut* krivulje u točki C. Njegove katete su duljina dx i dy, a duljinu hipotenuze označimo s ds.

Neka je S sjecište tangente na krivulju u točki C s y-osi. P neka je sjecište tangente i okomice na tangentu koja prolazi kroz ishodište O. Duljinu stranice OS označimo sa z, a duljinu stranice OP s p.

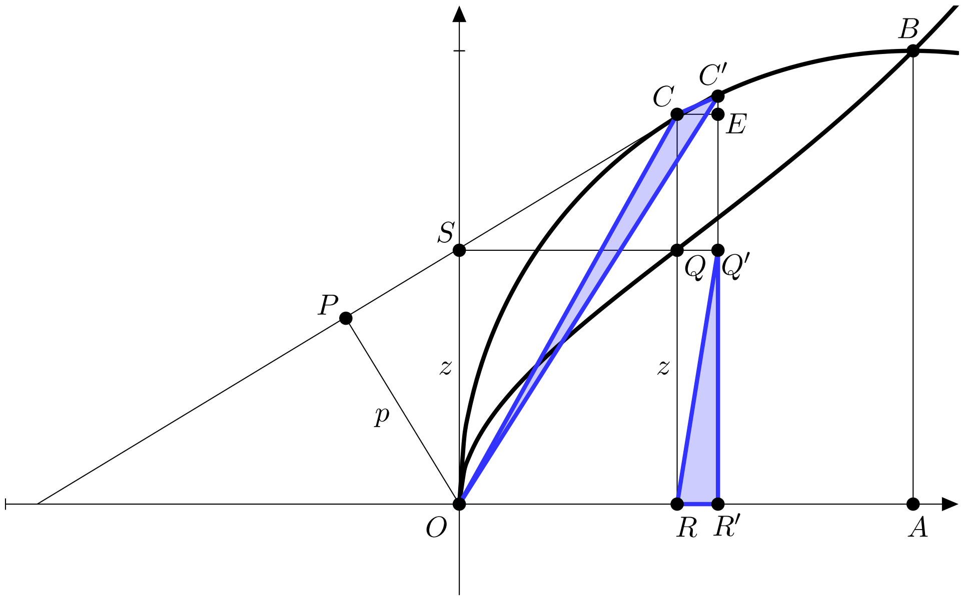
Istaknimo sada točku Q s koordinatama (x, z). Ponavljanjem ove konstrukcije za svaku točku C početne krivulje dobivamo točke Q na novoj krivulji za koju kažemo da je dobivena transmutacijom početne krivulje. Pokažimo u kakvom su odnosu površine ispod dvije krivulje.

Prvo uočimo da je trokut OSP sličan karakterističnom trokutu te da vrijedi

$$pds = zdx .$$

Koncentrirajmo se sada na osjenčane površine. Uočimo da trokut OCC' ima stranicu duljine ds i visinu duljine p. Slijedi

$$P(OCC') = \frac{1}{2}pds = \frac{1}{2}zdx .$$



Slika 2: Transmutacija dijela kružnice

No, to je upravo pola površine pravokutnika $RR'Q'Q$. Sad s jedne strane imamo površinu K_1 ispod početne krivulje koja je jednaka sumi površina svih trokuta OCC' i površine trokuta OAB, a s druge strane imamo površinu K_2 ispod transmutirane krivulje koja je jednaka sumi površina svih pravokutnika $RR'Q'Q$. Zaključujemo da je

$$K_1 = P(OAB) + \frac{1}{2}K_2 \,.$$

I to je upravo Leibnizovo transmutacijsko pravilo.

Pokažimo sada kako se dolazi do razvoja za π. Kako je naša krivulja četvrtina kružnice, znamo da je $K_1 = \pi/4$ te da je $y = \sqrt{2x - x^2}$. Znamo i da je tangenta u točki C okomita na radijus CA iz čega slijedi sličnost karakterističnog trokuta i trokuta CAR. Iz toga proizlazi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y} \,,$$

te

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \,.$$

Leibniz se na ovom mjestu poslužio sljedećim trikom. Umjesto da traži kompliciranu sumu

$$K_2 = \int_0^1 z dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx \,,$$

on je uočio da se slika može okrenuti i da je lakše izračunati komplement površine K_2 u jediničnom kvadratu:

$$1 - K_2 = \int_0^1 x dz \,.$$

Naime, vrijedi

$$x = \frac{2z^2}{z^2+1} = 2z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots) \,.$$

Sumiranjem član po član dobije se

$$K_2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \dots .$$

Konačno, primjenom transmutacijskog pravila imamo

$$\frac{\pi}{4} = K_1 = P(OAB) + \frac{1}{2}K_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

□

Literatura

[1] Z. Šikić, *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.