Druga zadaća iz Teorije, metodike i povijesti infinitezimalnih računa

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

27. siječnja 2011.

1. Sumirati $\sum x^4 / \sum a^4$ kao Cavalieri. [Rezultat: 1/5.]

Rješenje. Raspisivanjem i korištenjem Cavalierijevog principa za grupiranje članova oblika $\sum x^k y^l$ i $\sum x^l y^k$ nalazimo

$$\begin{aligned}\sum a^4 &= \sum (x+y)^4 = 2\sum x^4 + 8\sum x^3 y + 6\sum x^2 y^2\,,\\ \sum a^4 &= a\sum (x+y)^3 = 2a\sum x^3 + 6a\sum x^2 y\,.\end{aligned}$$

Uvažavanjem otprije poznatog rezultata $\sum x^3 = (1/4)\sum a^3$ i sređivanjem druga se jednakost transformira u

$$\frac{1}{2}\sum a^4 = 6\sum x^3 y + 6\sum x^2 y^2\,.$$

Sad koristimo trik s predavanja kako bismo eliminirali član $\sum x^2 y^2$. Stavljamo $x = a/2 + z$, $y = a/2 - z$ i računamo:

$$\sum x^2 y^2 = \sum \left(\frac{a^4}{16} - \frac{a^2}{2} z^2 + z^4\right) = \frac{1}{16}\sum a^4 - \frac{a^2}{2}\sum z^2 + \sum z^4\,.$$

Za sumu $\sum z^2$ smo vidjeli da vrijedi

$$\sum z^2 = \frac{1}{4}\sum x^2 = \frac{1}{12}\sum a^2\,.$$

Analogno se vidi da vrijedi

$$\sum z^4 = \frac{1}{16}\sum x^4\,.$$

Uvrštavanjem svega u početni sustav i sređivanjem dobije se novi sustav:

$$\begin{aligned}\frac{7}{8}\sum a^4 &= \frac{19}{8}\sum x^4 + 8\sum x^3 y\,,\\ \frac{3}{8}\sum a^4 &= \frac{3}{8}\sum x^4 + 6\sum x^3 y\,,\end{aligned}$$

iz kojeg se eliminacijom nepoznanice $\sum x^3 y$ dobije traženi rezultat

$$\sum x^4 = \frac{1}{5}\sum a^4\,.$$

□

2. Dokazati neklasičnim pristupom standardan rezultat: Ako niz (f_n) neprekidnih realnih funkcija realne varijable uniformno konvergira prema funkciji f, onda je i f neprekidna.

Rješenje. Neka je x_0 proizvoljan (realan) element domene funkcije f (pretpostavljamo da sve funkcije imaju istu domenu D), te neka je α hiperrealan broj takav da je $\alpha \approx x_0$. Dokazat ćemo da je $f(\alpha) \approx f(x_0)$, tj. da je $|f(\alpha) - f(x_0)|$ infinitezimal.

Neka je e proizvoljan pozitivan realan broj. Zbog uniformne konvergencije niza (f_n) postoji prirodan broj n za koji vrijedi:

$$(\forall x \in D)\ |f_n(x) - f(x)| < e/3\,. \tag{1}$$

Sada, ako je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, za proširenja funkcija u našem konkretnom modelu vrijedi:

$$|f_n(\alpha) - f(\alpha)| = (|f_n(\alpha_1) - f(\alpha_1)|, |f_n(\alpha_2) - f(\alpha_2)|, \ldots)\,.$$

Drugim riječima, radi se o hiperrealnom broju kojem je zbog (1) svaka koordinata manja od $e/3$. No, onda je i sam hiperrealan broj manji od $e/3$. (Ovu činjenicu bismo u „pravoj" nestandardnoj analizi dobili principom transfera iz (1).)

Sve skupa vrijedi:

$$|f(\alpha) - f(x_0)| \leqslant |f(\alpha) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < e\,.$$

Pritom je zbog neprekidnosti f_n srednji pribrojnik infinitezimal pa je svakako manji od $e/3$. Zbog proizvoljnosti e slijedi tvrdnja. □

3. Dokazati neklasičnim pristupom da je svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ Riemann-integrabilna.

Rješenje. Definirajmo n kao najveći prirodan broj takav da za realan broj $\Delta x > 0$ vrijedi

$$a + n\Delta x \leqslant b\,.$$

Definirajmo i sljedeći niz točaka:

$$x_i := a + i\Delta x,\ \text{za } 0 \leqslant i \leqslant n,\ \text{te } x_{n+1} := b\,.$$

Označimo s m_i i M_i minimum, odnosno maksimum koji funkcija f postiže na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ (zbog neprekidnosti na segmentu funkcija doista postiže te vrijednosti). Konačno, definirajmo step funkcije:

$$\delta_{1/\Delta x} := \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1}]}\,,$$
$$\gamma_{1/\Delta x} := \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} M_i \chi_{[x_i, x_{i+1}]}\,.$$

Pritom su $\chi_{[x_i, x_{i+1}]}$ funkcije indikatori segmenata $[x_i, x_{i+1}]$.

Neka je sada $\delta := (\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_8, \ldots)$ (dakle, odgovarajući Δx su $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$). Analogno, neka je $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_8, \ldots)$. Označimo:

$$D := \int_a^b \delta(x)dx = \left(\int_a^b \delta_1(x)dx, \int_a^b \delta_2(x)dx, \int_a^b \delta_4(x)dx, \ldots\right)$$
$$G := \int_a^b \gamma(x)dx = \left(\int_a^b \gamma_1(x)dx, \int_a^b \gamma_2(x)dx, \int_a^b \delta_4(x)dx, \ldots\right)$$

Lako se vidi da je niz D rastući i odozgo omeđen (primjerice s $\int_a^b \gamma_1(x)dx$). Stoga je on, shvaćen kao hiperrealan broj, beskonačno blizu nekom realnom broju d. Analogno, G je padajući i odozdo omeđen niz pa je, shvaćen kao hiperrealan broj, beskonačno blizu nekom realnom broju g.

Međutim, ako je e pozitivan realan broj, zbog uniformne neprekidnosti f (kao posljedice neprekidnosti na segmentu $[a,b]$) možemo pronaći n_0 oblika 2^{k_0} takav da $|x-y|<1/n_0$ povlači $|f(x)-f(y)|<e/(b-a)$. Specijalno, za svaki i, $0 \leqslant i \leqslant n$, vrijedi

$$M_i - m_i < e/(b-a)\,.$$

Kao posljedica toga, za svaki $k \geqslant k_0$ i $n = 2^k$ vrijedi

$$\int_a^b \gamma_n(x)dx - \int_a^b \delta_n(x)dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < e\,.$$

Drugim riječima, $G - D$ je infinitezimal, tj. $G \approx D$. No, onda je i $g \approx d$, tj. $g = d$, te je d Riemannov integral funkcije f.

Kad malo detaljnije razvijemo aparaturu nestandardne analize, argumentaciju ćemo moći provesti otprilike ovako. Promotrimo proširenje funkcije

$$\Delta x \mapsto \int_a^b \delta_{1/\Delta x}(x)dx\,.$$

Evaluacijom za infinitezimal ε dobijemo beskonačnu donju Darbouxovu sumu D s obzirom na subdiviziju $[a,b]$ na infinitezimalne segmente $[x_i, x_{i+1}]$ (njih $n+1$, pri čemu je n sad beskonačan „hiperprirodan” broj). Sasvim analogno za gornju Darbouxovu sumu G.

No, na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ je zbog uniformne neprekidnosti funkcije f razlika $M_i - m_i$ infinitezimal. Transferiranjem činjenice da u standardnom slučaju zbog konačnosti postoji j, $0 \leqslant j \leqslant n$, takav da je $M_j - m_j$ maksimalan, zaključujemo da je

$$0 \leqslant \int_a^b \gamma_{1/\varepsilon}(x)dx - \int_a^b \delta_{1/\varepsilon}(x)dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < (M_j - m_j)(b-a)\,.$$

S desne strane nejednakosti nalazi se infinitezimal pa zaključujemo da je $D \approx G$. Uzimanjem standardnog dijela dobivamo integral funkcije f. $\square$

Literatura

[1] H. J. Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, on-line izdanje, 2010.

[2] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Princeton University Press, 1996.

[3] K. D. Stroyan, W. A. J. Luxemburg, *Introduction to the theory of infinitesimals*, Academic Press, 1976.