Neprekidne funkcije – nestandardni pristup

Predavanje u sklopu Teorije, metodike i povijesti infinitezimalnih računa

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

PMF – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

10. veljače 2011.

Ciljevi predavanja

- Osnovni rezultati o neprekidnim funkcijama u nestandardnom ambijentu:
  - Neprekidnost na segmentu
  - Suma, produkt, kompozicija neprekidnih funkcija
- Usporedba s klasičnim dokazima
- Primjeri, zadatci, sitnice za daljnju upotrebu

Definicija.

Funkcija f je neprekidna u realnom broju r ako i samo ako $p \approx r$ povlači $f(p) \approx f(r)$ za svaki hiperrealan p.

Definicija.

Funkcija je neprekidna ako je neprekidna u svakom realnom broju.

Zadatak.

$f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ je neprekidna u $x = 3$.

Rješenje.

Neka je $p \approx 3$. Tada je $p = 3 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

$$f(p) = 31 + 22\varepsilon + 4\varepsilon^2 \approx 31 = f(3).$$

$\square$

Definicija.

Funkcija f je neprekidna u realnom broju r ako i samo ako $p \approx r$ povlači $f(p) \approx f(r)$ za svaki hiperrealan p.

Definicija.

Funkcija je neprekidna ako je neprekidna u svakom realnom broju.

Zadatak.

$f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ je neprekidna u $x = 3$.

Rješenje.

Neka je $p \approx 3$. Tada je $p = 3 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

$$f(p) = 31 + 22\varepsilon + 4\varepsilon^2 \approx 31 = f(3)\,.$$

$\square$

Zadatak.

$f(x) = 1/x$ je neprekidna u $x = 1$.

Rješenje.

Neka je $p \approx 1$. Tada je $p = 1 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

$$f(p) = \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} =: \spadesuit\,.$$

Kako je $1 + \varepsilon \gtrnapprox 0$, postoji realan r takav da je $0 < r < 1 + \varepsilon$. No tada je

$$0 \leqslant \frac{|\varepsilon|}{1+\varepsilon} < \frac{|\varepsilon|}{r}\,,$$

pa je

$$\spadesuit \approx 1 = f(1)\,.$$

$\square$

Zadatak.

$f(x) = \cos x$ je neprekidna.

Rješenje.

Neka je realan r proizvoljan i neka je $p \approx r$. Tada je $p = r + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

- $\forall x \forall y (\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$ je istinita u $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$ pa vrijedi:
$$f(p) = \cos r \cos \varepsilon - \sin r \sin \varepsilon =: \spadesuit .$$
- $\forall x (-\pi/2 < x < \pi/2 \to 0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant |x|)$ je istinita u $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$ pa vrijedi:
$$0 \leqslant 1 - \cos \varepsilon \leqslant |\varepsilon| .$$
- $\forall x (-\pi/2 < x < \pi/2 \to 0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|)$ je istinita u $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$ pa vrijedi:
$$0 \leqslant |\sin \varepsilon| \leqslant |\varepsilon| .$$

Dakle, $\spadesuit \approx \cos r = f(r)$. $\square$

Zadatak.

$f(x) = x \sin x + 2$ je neprekidna u $x = -1$.

Rješenje.

Neka je $p \approx -1$. Tada je $p = -1 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

$$\begin{aligned} f(p) &= -\sin(-1)\cos\varepsilon - \cos(-1)\sin\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon\sin(-1)\cos\varepsilon + \varepsilon\cos(-1)\sin\varepsilon + 2 \\ &\approx -\sin(-1) + 2 \\ &= f(-1)\,. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak.
$f(x) = \cos(x^2 - x)$ je neprekidna u $x = 3$.

Rješenje.
Neka je $p \approx 3$. Tada je $p = 3 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0. Raspisivanjem i korištenjem $\cos\delta \approx 1$ i $\sin\delta \approx 0$ kao u prethodnim zadatcima, nalazimo:

$$f(p) \approx \cos 6 = f(3).$$

$\square$

Zadatak.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ je neprekidna u $x = 2$.

Rješenje.

Neka je $p \approx 2$. Tada je $p = 2 + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0.

$$f(p) = \frac{\sin(2+\varepsilon)}{\cos(2+\varepsilon)} = \frac{\sin 2 \cos \varepsilon + \cos 2 \sin \varepsilon}{\cos 2 \cos \varepsilon - \sin 2 \sin \varepsilon} =: \spadesuit\,.$$

Općenito, neka je $a \approx c$, $b \approx d$ i $bd \not\approx 0$. Tada postoji realan r takav da je $0 < r \leqslant |bd|$. Za proizvoljan realan $e > 0$ zbog $|ad - bc| \approx 0$ vrijedi

$$|ad - bc| < er \leqslant e|bd|\,.$$

Dijeljenjem s $|bd|$ dobijemo $|a/b - c/d| < e$. Dakle, $a/b \approx c/d$. Slijedi

$$\spadesuit \approx \frac{\sin 2}{\cos 2} = f(2)\,.$$

Zadatak.

$f(x) = \sqrt{x}$ je neprekidna u svakom $x > 0$.

Rješenje.

Neka je $p \approx x > 0$. Tada je $p = x + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0. Vrijedi:

$$\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}} =: \spadesuit\,.$$

Nadalje,

$$0 \leqslant \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}} < \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{x}}\,,$$

iz čega slijedi da je

$$\spadesuit \approx 0\,, \text{ tj. } f(p) \approx f(x)\,.$$

$\square$

Teorem.
Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je f omeđena na $[a, b]$.

Dokaz.
Neka je y hiperrealan broj iz slike funkcije f. Odaberimo hiperrealan broj $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$.

- Zbog omeđenosti $[a, b]$ postoji $st(x)$.
- Zbog zatvorenosti $[a, b]$ je $st(x) \in [a, b]$.
- Zbog neprekidnosti f je $y = f(x)$ konačan; naime, $f(x) \approx f(st(x))$.

Rečenica $\exists h \forall x (a \leqslant x \leqslant b \to -h < f(x) < h)$ istinita je u $^*\mathbb{R}$ (h je bilo koji beskonačan hiperrealan broj). Principom transfera istinita je u $\mathbb{R}$. $\square$

Usporedba s klasičnim dokazom

Dokaz.

Neka je (y_n) niz u slici od f. Odaberimo niz (x_n) u $[a, b]$ takav da je $f(x_n) = y_n$ za svaki n.

- Zbog omeđenosti $[a, b]$ niz (x_n) ima konvergentan podniz (x_{n_k}).
- Zbog zatvorenosti $[a, b]$ je $x := lim_k x_{n_k} \in [a, b]$.
- Zbog neprekidnosti f je $lim_k y_{n_k} = lim_k f(x_{n_k}) = f(x)$.

Dakle, (y_n) ima konvergentan podniz u slici od f. Slika od f je kompaktna! $\square$

Pitanje: Koliko je kompaktnost slike zapravo daleko od početne tvrdnje teorema?

Teorem.

Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada f poprima minimum i maksimum.

Dokaz.

f je omeđena; neka je d realan broj takav da je $-d < f(x) < d$ za svaki $x \in [a, b]$. Za cijeli broj $n > 0$ podijelimo segment $[-d, d]$ na podsegmente određene točkama:

$$x_0 := -d, \ldots, x_k := -d + k\frac{2d}{n}, \ldots, x_n := d\,.$$

Tada postoji zadnji segment koji sadrži neku vrijednost funkcije f.

Nastavak dokaza.

$$\forall n\Big(I(n) \wedge n > 0 \rightarrow \exists k\big(I(k) \wedge 0 \leqslant k < n \wedge \exists x(a \leqslant x \leqslant b \wedge x_k \leqslant f(x)) \\ \wedge \forall y(a \leqslant y \leqslant b \rightarrow f(y) \leqslant x_{k+1})\big)\Big)$$

je istinita u $\mathbb{R}$ pa po principu transfera i u ${}^*\mathbb{R}$. Specijalno, istinita je za neki beskonačan hiperprirodan broj N. Neka je K, $0 \leqslant K < N$ pripadni hiperprirodan broj te $x \in [a, b]$ hiperrealan broj za koji je $x_K \leqslant f(x)$.
Tvrdimo da je $st(x)$ maksimizator funkcije.
Iz $x_K \leqslant f(x) \leqslant x_{K+1}$ slijedi $f(x) \approx x_{K+1}$. Iz neprekidnosti slijedi $f(st(x)) \approx x_{K+1}$. Neka je $y \in [a, b]$ proizvoljan realan broj. Tada je

$$f(y) = st(f(y)) \leqslant st(x_{K+1}) = f(st(x)) .$$

$\square$

Zadatak.

Dokazati prethodni teorem podjelom segmenta $[a, b]$.

Rješenje.

Za cijeli broj $n > 0$ podijelimo $[a, b]$ na podsegmente određene točkama:

$$x_0 := a, \dots, x_k := a + k\frac{b-a}{n}, \dots, x_n := b\,.$$

Tada postoji cijeli broj k, $0 \leqslant k \leqslant n$, takav da je $f(x_k)$ maksimalan. Nadalje, za svaki $d \in [a, b]$ postoji najveći cijeli broj m, $0 \leqslant m \leqslant n$, takav da je $f(x_m) \leqslant d$. Formalno:

Nastavak rješenja.

$$
\begin{aligned}
&\forall n\Big(I(n)\land n>0\to\\
&\quad\exists k\big(I(k)\land 0\leqslant k\leqslant n\land\forall i(I(i)\land 0\leqslant i\leqslant n\to f(x_i)\leqslant f(x_k))\big)\\
&\quad\land\forall d\Big(a\leqslant d\leqslant b\to\\
&\quad\exists m\big(I(m)\land 0\leqslant m\leqslant n\land\forall i(I(i)\land 0\leqslant i\leqslant n\to x_i\leqslant x_m\lor x_i>d)\big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Neka je N beskonačan pozitivan hipercijeli koji uz pripadni K zadovoljava rečenicu. Tvrdimo da je $x := st(x_K)$ maksimizator. Naime, neka je $d\in[a,b]$ realan i neka je M pripadni hipercijeli. Vidimo da je $d\approx x_M$. Stoga vrijedi:

$$f(d)\approx f(x_M)\leqslant f(x_K)\approx f(x)$$

te

$$f(d)=st(f(x_M))\leqslant st(f(x_K))=f(x).$$

Primjer. (Nužnost zatvorenosti)

Funkcija $f(x) = 1/x$ je neprekidna na $\langle 0, 1\rangle$, ali neomeđena.

Primjer. (Nužnost neprekidnosti)

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2x-3), & x \neq 3/2 \\ 1/2, & x = 3/2 \end{cases}$$

Funkcija f je neomeđena na $[1, 2]$.

Primjer. (Nužnost neprekidnosti za drugi teorem)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1/2 \\ 0, & x \geqslant 1/2 \end{cases}$$

Funkcija f je omeđena na $[1, 2]$, međutim, svejedno ne poprima maksimum.

Zadatak.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Pokazati da je f neprekidna u $x \neq 0$, no ima prekid u $x = 0$ kako god je redefinirali u toj točki.

Rješenje.

Neprekidnost u $x \neq 0$ iz neprekidnosti $x \mapsto 1/x$ te $\cos \varepsilon \approx 1$ i $\sin \varepsilon \approx 0$.
S druge strane, u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{HR}$ je istinita rečenica:

$$\forall M \big(\exists x_1 (x_1 > M \wedge \sin x_1 = -1) \wedge \exists x_2 (x_2 > M \wedge \sin x_2 = 1) \big) .$$

Specijalno, za pozitivan beskonačan M je $1/x_1 \approx 1/x_2 \approx 0$, ali

$$\sin \frac{1}{1/x_1} = -1, \quad \sin \frac{1}{1/x_2} = 1 .$$

Teorem.

Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i neka je r realan broj između $f(a)$ i $f(b)$. Tada postoji realan $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = r$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $f(a) < r < f(b)$ (slučaj $f(b) < r < f(a)$ je analogan). Za cijeli broj $n > 0$ podijelimo $[a, b]$ na podsegmente određene točkama:

$$x_0 := a, \dots, x_k := a + k\frac{b-a}{n}, \dots, x_n := b\,.$$

Tada postoji cijeli k, $0 \leqslant k < n$, takav da je $f(x_k) < r \leqslant f(x_{k+1})$ (naime, postoji najveći $k < n$ za koji je $f(x_k) < r$).

Nastavak dokaza.

Formalno, sljedeća rečenica je istinita u $\mathbb{R}$ pa onda i u $\mathbb{HR}$:

$$\forall n\Big(I(n) \land n > 0 \to \exists k\big(I(k) \land 0 \leqslant k < n \land f(x_k) < r \leqslant f(x_{k+1})\big)\Big).$$

Specijalno, za beskonačan pozitivan hipercijeli N postoji K takav da je $f(x_K) < r \leqslant f(x_{K+1})$. Stavimo $x := st(x_K)$. (Napomena: postoji $st(x_K)$ i $st(x_K) \in [a, b]$.) Vrijedi $x \approx x_K \approx x_{K+1}$. Zbog neprekidnosti je onda $f(x) \approx f(x_K) \approx f(x_{K+1})$. Slijedi $r \approx f(x_K) \approx f(x)$, tj. $r = f(x)$ jer se radi o realnim brojevima. □

Primjer. (Nužnost neprekidnosti)

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2x-3), & x \neq 3/2 \\ 1/2, & x = 3/2 \end{cases}$$

Za funkciju f vrijedi $f(1) = -1 < 0$ i $f(2) = 1 > 0$, međutim, ne postoji $x \in [1,2]$ takav da je $f(x) = 0$.

Zadatak.

Dokazati da svaki realan broj ima treći korijen.

Rješenje.

Neka je r realan broj. Promotrimo $f(x) = x^3 - r$. Za proizvoljan x neka je $p \approx x$. Tada je $p = x + \varepsilon$ te

$$f(p) = x^3 + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r \approx f(x)\,,$$

dakle, funkcija je neprekidna. Pretpostavimo prvo da je $r > 0$. Tada je $f(-r) < 0$ i $f(\max\{2, r\}) > 0$. S druge strane, ako je $r < 0$, onda je $f(-r) > 0$, $f(\min\{-2, r\}) < 0$. Ako je pak $r = 0$, onda je $f(0) = 0$. U svakom slučaju, postoji x takav da je $f(x) = 0$. $\square$

Zadatak.

Dokazati da je svaka parabola ($f(x) = ax^2 + bx + c$) neprekidna.

Rješenje.

Neka je x proizvoljan realan broj i $p \approx x$. Tada je $p = x + \varepsilon$, za ε infinitezimal ili 0. Vrijedi:

$$f(p) = ax^2 + 2ax\varepsilon + a\varepsilon^2 + bx + b\varepsilon + c \approx ax^2 + bx + c = f(x)\,.$$

$\square$

Teorem.

Neka je funkcija f monotona na $[a, b]$ i neka za svaki realan r između $f(a)$ i $f(b)$ postoji realan $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = r$. Tada je f neprekidna.

Dokaz.

Pretpostavimo da f nije neprekidna i neka su realan x i hiperrealan p iz $[a, b]$ takvi da je $x \approx p$, ali $f(x) \not\approx f(p)$. Zbog drugog, postoji realan r između $f(x)$ i $f(p)$. Zbog monotonosti je r između $f(a)$ i $f(b)$ pa postoji realan $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = r$. Opet zbog monotonosti, c je između x i p (i različit je od njih). No, to je u kontradikciji s $x \approx p$. $\square$

(Usporedba s klasičnim dokazom.)

Teorem.

Neka su funkcije f, g neprekidne u r. Tada su i funkcije $f + g$, $f - g$, fg neprekidne u r. Nadalje, ako je $g(r) \neq 0$, onda je i $1/g$ neprekidna u r.

Dokaz.

Neka je $p \approx r$ i označimo $\varepsilon := f(r) - f(p)$, $\delta := g(r) - g(p)$. Zbog neprekidnosti su ε, δ infinitezimali ili 0.

- $(f + g)(r) - (f + g)(p) = \varepsilon + \delta$, infinitezimal ili 0.
- $(f - g)(r) - (f - g)(p) = \varepsilon - \delta$, infinitezimal ili 0.
- $(fg)(r) - (fg)(p) = f(r)g(r) - f(r)g(p) + f(r)g(p) - f(p)g(p) = f(r)\delta + g(p)\varepsilon$, infinitezimal ili 0. (Zašto je $g(p)\varepsilon$ infinitezimal ili 0?)
- $(1/g)(r) - (1/g)(p) = -\delta/(g(r)g(p))$, infinitezimal ili 0. (Zašto?)

$\square$

Zadatak.

1. $f(x) = x$ je neprekidna.
2. Za svaki r, $f(x) = r$ je neprekidna.
3. Svaki polinom je neprekidna funkcija.

Rješenje.

(1) i (2) trivijalno. (3) dokazujemo indukcijom po stupnju polinoma. Baza indukcije je (2). Pretpostavimo da je svaki polinom stupnja manjeg od n neprekidan i neka je f polinom stupnja n. Tada je

$$f(x) = xg(x) + r\,,$$

pri čemu je g polinom stupnja manjeg od n, a r slobodan član polinoma f. g je neprekidan po pretpostavci indukcije, a f je onda neprekidan zbog prethodnog teorema. $\square$

Teorem.

Neka su funkcije f, g neprekidne. Tada je i $f \circ g$ neprekidna.

Dokaz.

Neka je x proizvoljan realan broj i $p \approx x$. Zbog neprekidnosti g vrijedi $g(x) \approx g(p)$. Primijetimo da je $g(x)$ realan. Zbog neprekidnosti f dalje vrijedi $f(g(x)) \approx f(g(p))$. $\square$

Zadatak.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ je racionalan} \\ -x, & x \text{ je iracionalan} \end{cases}$$

Funkcija f je neprekidna samo u točki 0.

Rješenje.

Neka je prvo $p \approx 0$. Tada je i $-p \approx 0$ pa je u svakom slučaju $f(p) \approx f(0)$. Dakle, f je neprekidna u 0.
Nadalje, neka je $r \neq 0$ proizvoljan (standardan) iracionalan broj i neka je $p \approx r$ neki hiperrealan broj takav da je $p \neq r$.

Nastavak rješenja.

Označimo li s Q relaciju „biti racionalan", sljedeća rečenica vrijedi u $\mathbb{R}$ pa onda i u $\mathbb{HR}$:

$$\forall a \forall b (a < b \rightarrow \exists c (Q(c) \wedge a < c < b)) .$$

Specijalno, postoji hiperracionalan broj q između p i r. Za q sada vrijedi $r \approx q$ i $-r \approx -q$. Međutim, kad bi bilo $-r \approx q$, imali bismo $-r \approx r$, što je nemoguće zbog $r \neq 0$. Zaključujemo $f(r) \not\approx f(q)$ pa f ima prekid u r. Analogno za racionalan $r \neq 0$. □

Zadatak.

$f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ je neprekidna.

Rješenje.

Primijetimo da je $f(x) = g(x) \cdot (1/h(x))$, pri čemu su $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = x^2 + 1$. Kako su g i h polinomi, neprekidni su po dokazanom. Sada neprekidnost f slijedi iz teorema o neprekidnosti sume i produkta neprekidnih funkcija i činjenice da je $h(x) \neq 0$ za svaki x. $\square$

Zadatak.

$f(x) = |x|$ je neprekidna.

Rješenje.

Primijetimo da je $f(x) = \sqrt{x^2} = (g \circ h)(x)$, pri čemu je $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$. Funkcije g i h su neprekidne po dokazanom pa je f neprekidna zbog teorema o neprekidnosti kompozicije neprekidnih funkcija. $\square$

Zadatak.

Ako su f, g neprekidne u r i $g(r) \neq 0$, onda je f/g neprekidna u r.

Rješenje.

$(f/g)(x) = f(x) \cdot (1/g(x))$. Tvrdnja sada slijedi iz teorema o neprekidnosti sume i produkta neprekidnih funkcija. $\square$

Definicija.

Skup $X \subseteq \mathbb{R}$ je *interval* ako i samo ako za sve $a, b \in X$ i $c \in \mathbb{R}$ iz $a < c < b$ slijedi $c \in X$.

Zadatak.

Ako je X interval i f neprekidna na X, onda je slika od f interval.

Dokaz.

Neka su $a, b \in \mathcal{R}(f)$ i c realni brojevi takvi da je $a < c < b$. Postoje realni d, e takvi da je $f(d) = a$, $f(e) = b$. Svakako je $d \neq e$. Pretpostavimo da je $d < e$ (slučaj $d > e$ je analogan). Tada je $[d, e] \subseteq X$ pa po jednom od prethodnih teorema postoji $x \in [d, e]$ takav da je $f(x) = c$. No tada je $c \in \mathcal{R}(f)$. $\square$

Zadatak.

Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i $f(x)$ je realan za sve hiperrealne $x \in [a, b]$, onda je f konstanta.

Rješenje.

Neka je $c \in [a, b]$, $c > a$, realan broj. Pretpostavimo da je $f(c) > f(a)$. Tada je u $\mathbb{R}$, a onda i u $\mathbb{HR}$ istinita sljedeća rečenica:

$$\forall y(f(a) < y < f(c) \rightarrow \exists x(a < x < c \land f(x) = y)) .$$

Specijalno, neka je ε pozitivan infinitezimal. Tada za $y = f(a) + \varepsilon$ postoji hiperrealan x, $a < x < c$ takav da je $f(x) = f(a) + \varepsilon$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $f(x)$ realan. Slično, $f(c) < f(a)$ vodi do kontradikcije. Slijedi da je $f(c) = f(a)$. $\square$

J. M. Henle, E. M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, Dover, 2003.

H. J. Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, on-line izdanje, 2010.
http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

A. Robinson, *Non-standard analysis*, Princeton University Press, 1996.

Zahvaljujem na pažnji!

Ako imate pitanja, slobodno ih postavite, a ja ću pokušati odgovoriti na njih.