Zadatak iz Konkretne matematike 1 zadan 16.10.2006.

Filip Nikšić

21. listopada 2006.

3. Izračunajte limes
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}.$$

Rj. Označimo $S_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$, $n \geq 1$. Primijetimo da brojnik i nazivnik svakog sumanda možemo podijeliti s n^2.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Možemo pisati:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Sad je vidljivo da je S_n integralna suma funkcije f s obzirom na subdiviziju $\rho_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Čak štoviše, kako je $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ na $[0,1]$, to je f rastuća pa je na podintervalu $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, \ldots, n$, maksimum od f upravo $f(\frac{k}{n})$. Dakle, S_n je gornja Darbouxova suma funkcije f s obzirom na subdiviziju ρ_n. Odgovarajuća donja Darbouxova suma je $s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}$.

Kako je
$$S_n - s_n = (f(1) - f(0))\frac{1}{n} = \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1$$
to je
$$\lim_n (S_n - s_n) = 0.$$

Zbog

$$s_n \leq \int_0^1 f(x)dx \leq S_n, \quad n \geq 1$$

je

$$0 \leq \lim_n (S_n - \int_0^1 f(x)dx) \leq \lim_n (S_n - s_n) = 0$$

pa je

$$\lim_n S_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

Preostaje još izračunati integral $\int_0^1 f(x)dx$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = [u = 1 + x^2] = \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln 2.$$