Zadatak iz Konkretne matematike 1 zadan 6.11.2006.

Filip Nikšić

12. studenog 2006.

3. Izračunajte sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Rj. Izvedimo prvo adicijsku formulu za tangens koju ćemo kasnije iskoristiti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \\
&= \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \\
&= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}
\end{aligned}$$

Primijetimo sad da $\frac{1}{n^2+n+1}$ možemo zapisati ovako:

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{1+(n+1)n} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$$

Uvažimo li da je $n+1 = \operatorname{tg}\operatorname{arctg}(n+1)$ i $n = \operatorname{tg}\operatorname{arctg} n$, imamo:

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} n}{1 + (\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(n+1))(\operatorname{tg}\operatorname{arctg} n)}$$

Prema maločas izvedenoj adicijskoj formuli imamo:

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n\right)$$

Ostaje sitan detalj za provjeriti. Naime, kako je $n+1 > 0$ i $n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, to je $\operatorname{arctg}(n+1) \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $\operatorname{arctg} n \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Osim toga, arctg je strogo rastuća funkcija pa je $\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n > 0$. Iz svega toga zaključujemo da je $\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ pa bez bojazni možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) &= \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) = \\ &= \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n\end{aligned}$$

Početna suma svodi se na sljedeće:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n)$$

Pogledajmo parcijalnu sumu tog reda:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1$$

Tražena suma jednaka je limesu $\lim_n S_n$. No, da bismo pronašli taj limes, potreban nam je limes niza $(\operatorname{arctg}(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$. Jasno je da je taj limes jednak $\frac{\pi}{2}$. Naime, za $\epsilon > 0$, ako je $\epsilon > \frac{\pi}{2}$ uzmemo $n_0 := 0$, inače uzmemo $n_0 := \lceil \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \epsilon) \rceil$. Tada $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n+1)| < \epsilon$.

Konačno imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) &= \lim_n S_n = \\ &= \lim_n \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$