Zadatak iz Konkretne matematike 1 zadan 13.11.2006.

Filip Nikšić

14. studenog 2006.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $P \in \mathbb{C}[z]$ definiran formulom $P(z) := z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$. Ako sa S označimo skup svih (kompleksnih) nultočaka od P, izračunajte sumu

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{s-1}.$$

Rj. Označimo sa S' skup svih nultočaka polinoma $P(z+1)$. Uočimo da je $s \in S$ ako i samo ako je $s - 1 \in S'$. Naime, $P((s-1)+1) = P(s) = 0$.

Traženu sumu (označimo je sa Σ) sad možemo zapisati ovako:

$$\Sigma = \sum_{s \in S} \frac{1}{s-1} = \sum_{s-1 \in S'} \frac{1}{s-1} = \sum_{z \in S'} \frac{1}{z}$$

Označimo nultočke od $P(z+1)$: $S' = \{z_1, \ldots, z_n\}$ i svedimo Σ na zajednički nazivnik:

$$\Sigma = \frac{z_2 z_3 \cdots z_n + z_1 z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_{n-1}}{z_1 z_2 z_3 \cdots z_n}$$

Odmah u brojniku i nazivniku prepoznajemo Vièteove formule pa imamo:

$$\Sigma = \frac{(-1)^{n-1} \langle z \rangle P(z+1)}{(-1)^n \langle 1 \rangle P(z+1)},$$

gdje su $\langle z \rangle P(z+1)$ i $\langle 1 \rangle P(z+1)$ koeficijenti polinoma $P(z+1)$ uz z, odnosno uz 1. Preostaje nam pronaći te koeficijente.

Znamo da je $P(z+1) = (z+1)^n + (z+1)^{n-1} + \cdots + (z+1) + 1$. Kako je po binomnom teoremu $\langle z \rangle (z+1)^k = \binom{k}{1} = k$, a $\langle 1 \rangle (z+1)^k = \binom{k}{0} = 1$, to je

$$\begin{aligned} \langle z \rangle P(z+1) &= n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \\ \langle 1 \rangle P(z+1) &= (n+1) \cdot 1 = n+1 \end{aligned}$$

Zato imamo:

$$\Sigma = -\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+1} = -\frac{n}{2}$$