Matematička teorija računarstva
Zadaća 1

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

21. studenog 2007.

Neoriginalni dio

Zadatak 1. Neka su R i S relacije ekvivalencije nad A. Dokažite ili opovrgnite tvrdnje:

(a) $R^2 = A^2 \;\Leftrightarrow\; R = A^2$

(b) $RS = A^2 \;\Leftrightarrow\; SR = A^2$

Rješenje. Tvrdnja (a) trivijalno slijedi iz činjenice da za relaciju ekvivalencije R vrijedi $R^2 = R$.

Naime, pretpostavimo da je $(x, y) \in R^2$, tj. da vrijedi $x\,R^2\,y$. Po definiciji slijedi da postoji $z \in A$ tako da je $x\,R\,z$ i $z\,R\,y$. No, kako je R tranzitivna relacija, to znači da je $x\,R\,y$.

Obrnuto, neka je $x\,R\,y$. Zbog refleksivnosti relacije R imamo $x\,R\,x$ pa zajedno s $x\,R\,y$ dobivamo $x\,R^2\,y$.

Dokažimo tvrdnju (b). Primijetimo prvo da je čitav A^2 simetrična relacija jer za sve $x, y \in A$ vrijedi i $(x, y) \in A^2$ i $(y, x) \in A^2$. Nadalje, na vježbama smo dokazali da je $(RS)^\tau = S^\tau R^\tau$.

Ako pretpostavimo $RS = A^2$, imamo sljedeći niz jednakosti:

$$A^2 = (A^2)^\tau = (RS)^\tau = S^\tau R^\tau = SR\,.$$

Za posljednju jednakost smo iskoristili činjenicu da su R i S simetrične relacije.

Analogno iz $SR = A^2$ slijedi $RS = A^2$. ∎

Zadatak 2. Definirajte pojam $\mathcal{P}$-zatvorenja relacije R. Pronađite ekvivalencijsko zatvorenje relacije R. Dokažite svoju tvrdnju.

Rješenje. Neka je R relacija nad A. $\mathcal{P}$-zatvorenje relacije R je najmanja relacija nad A koja sadrži R i ima svojstvo $\mathcal{P}$. (Naravno, moguće je da takva relacija ne postoji.)

Pokažimo da je ekvivalencijsko zatvorenje relacije R nad A dano s $(R \cup R^\tau)^\star$.

Po definiciji operacije $\star$ imamo $I \subseteq (R \cup R^\tau)^\star$ pa je ta relacija refleksivna.

Da bismo dokazali simetričnost, dokažimo prvo malo općenitiju tvrdnju: za proizvoljnu relaciju Q nad A vrijedi $(Q^\star)^\tau = (Q^\tau)^\star$. Naime:

$$\begin{aligned}
x\,(Q^\star)^\tau\,y \;&\Leftrightarrow\; y\,Q^\star\,x\\
&\Leftrightarrow\; y\,I\,x \quad \text{ili} \quad y\,Q\,x \quad \text{ili} \quad \exists n \geqslant 2,\; y\,Q^n\,x\\
&\Leftrightarrow\; x\,I\,y \quad \text{ili} \quad x\,Q^\tau\,y \quad \text{ili}\\
&\qquad \exists n \geqslant 2,\; \exists c_1,\dots,c_{n-1} \in A,\; y\,Q\,c_1\,Q\dots Q\,c_{n-1}\,Q\,x\\
&\Leftrightarrow\; x\,I\,y \quad \text{ili} \quad x\,Q^\tau\,y \quad \text{ili}\\
&\qquad \exists n \geqslant 2,\; \exists c_1,\dots,c_{n-1} \in A,\; x\,Q^\tau\,c_{n-1}\,Q^\tau\dots Q^\tau\,c_1\,Q^\tau\,x\\
&\Leftrightarrow\; x\,I\,y \quad \text{ili} \quad x\,Q^\tau\,y \quad \text{ili} \quad \exists n \geqslant 2,\; x\,(Q^\tau)^n\,y\\
&\Leftrightarrow\; x\,(Q^\tau)^\star\,y
\end{aligned}$$

Sad imamo $\big((R \cup R^\tau)^\star\big)^\tau = \big((R \cup R^\tau)^\tau\big)^\star = (R \cup R^\tau)^\star$ pa je naša relacija simetrična.

Neka je $x\,(R \cup R^\tau)^\star\,y$ i $y\,(R \cup R^\tau)^\star\,z$. Tad postoje $n, m \in \mathbb{N}$ tako da je $x\,(R \cup R^\tau)^n\,y$ i $y\,(R \cup R^\tau)^m\,z$ pa vrijedi $x\,(R \cup R^\tau)^{n+m}\,z$. Slijedi da je $x\,(R \cup R^\tau)^\star\,z$ pa je naša relacija i tranzitivna.

Dokazali smo da je $(R \cup R^\tau)^\star$ relacija ekvivalencije. Pretpostavimo sad da je S relacija ekvivalencije nad A takva da je $R \subseteq S$. Imamo $R^\tau \subseteq S^\tau = S$ pa zaključujemo da je $R \cup R^\tau \subseteq S$.

Neka je $x\,(R \cup R^\tau)^\star\,y$. Slijedi da je $x\,I\,y$, ili $x\,(R \cup R^\tau)\,y$ ili postoje $n \geqslant 2$ i elementi $c_1,\dots,c_{n-1} \in A$ takvi da je $x\,(R \cup R^\tau)\,c_1\,(R \cup R^\tau)\dots(R \cup R^\tau)\,c_{n-1}\,(R \cup R^\tau)\,y$. Zbog refleksivnosti S imamo $I \subseteq S$. Već smo vidjeli da je $R \cup R^\tau \subseteq S$ pa slijedi da je $x\,S\,y$ ili postoje $n \geqslant 2$ i elementi $c_1,\dots,c_{n-1} \in A$ takvi da je $x\,S\,c_1\,S\dots S\,c_{n-1}\,S\,y$, tj. postoji $n \geqslant 1$ takav da je $x\,S^n\,y$.

Matematičkom indukcijom dokazujemo da je $S^n = S$ za $n \geqslant 1$. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna, a slučaj $n = 2$ je već pokazan u (a) dijelu zadatka 1. Pretpostavimo da je $S^{n-1} = S$ za neki $n > 1$. Tad je $S^n = SS^{n-1} = SS = S$.

Dokazano koristimo da konačno zaključimo da je $x\,S\,y$, tj. da je $(R \cup R^\tau)^\star \subseteq S$.

Prema tome, naša relacija $(R \cup R^\tau)^\star$ je doista ekvivalencijsko zatvorenje relacije R. ■

Zadatak 3. Dokažite ili opovrgnite: ako su R i S relacije ekvivalencije, tad vrijedi:

$$RS = SR \;\Leftrightarrow\; R + S = RS$$

($R + S$ je najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži $R \cup S$.)

Rješenje. Po prethodnom zadatku i zbog činjenice da su R i S relacije ekvivalencije zaključujemo da je $R + S = (R \cup S \cup R^\tau \cup S^\tau)^\star = (R \cup S)^\star$.

Pretpostavimo prvo da je $RS = SR$.

Pokažimo prvo da je $R \cup S \subseteq RS$. Naime $x\,(R \cup S)\,y$ povlači $x\,R\,y$ ili $x\,S\,y$. U prvom slučaju zbog činjenice da je $y\,S\,y$ (S je refleksivna) imamo $x\,RS\,y$. Slično, u drugom slučaju zbog $x\,R\,x$ (R je refleksivna) imamo $x\,RS\,y$.

Pokažimo matematičkom indukcijom da je $(RS)^n = RS$ za sve $n \geqslant 1$. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna. Za $n = 2$ imamo $(RS)^2 = RSRS = RRSS = R^2S^2 = RS$. Ovdje smo iskoristili pretpostavku da je $RS = SR$ i u prethodnim zadatcima dokazanu činjenicu da za relacije ekvivalencije vrijedi $R^2 = R$ i $S^2 = S$. Pretpostavimo sad da za neki $n > 1$ vrijedi $(RS)^{n-1} = RS$. Tad je $(RS)^n = RS(RS)^{n-1} = RSRS = RS$. Time je indukcija završena.

Pokažimo sad da je $R + S \subseteq RS$. Neka je $x\,(R+S)\,y$. Zbog zaključka s početka rješenja to znači da je $x\,I\,y$, ili $x\,(R \cup S)\,y$ ili postoje $n \geqslant 2$ i elementi $c_1, \dots, c_{n-1}$ tako da je $x\,(R \cup S)\,c_1\,(R \cup S) \dots (R \cup S)\,c_{n-1}\,(R \cup S)\,y$. Ako je $x\,I\,y$, tad je $x\,R\,y$ (R je refleksivna) pa zajedno s $y\,S\,y$ (S je refleksivna) imamo $x\,RS\,y$. U ostalim slučajevima zbog $R \cup S \subseteq RS$ imamo da postoji $n \geqslant 1$ takav da je $x\,(RS)^n\,y$. No, zbog $(RS)^n = RS$ zaključujemo da je i tad $x\,RS\,y$.

Pokažimo da je $RS \subseteq R + S$. Naime, $x\,RS\,y$ povlači da postoji $z \in A$ takav da je $x\,R\,z$ i $z\,S\,y$. Očito je tad $x\,(R \cup S)\,z$ i $z\,(R \cup S)\,y$. Dalje, kako je $R \cup S \subseteq R+S$, imamo $x\,(R+S)\,z$ i $z\,(R+S)\,y$. Konačno, zbog tranzitivnosti relacije ekvivalencije $R+S$ slijedi $x\,(R+S)\,y$.

Time smo dokazali da je $R + S = RS$.

Pretpostavimo sad da vrijedi $R+S = RS$. Zbog simetričnosti relacija $R+S$, R i S imamo $R + S = (R+S)^\tau = (RS)^\tau = S^\tau R^\tau = SR$. Prema tome, imamo $RS = SR$. ■

Zadatak 4. Postoji li za svaki par prirodnih brojeva (m, n) parcijalno uređen skup koji ima točno m minimalnih i n maksimalnih elemenata? Ako je odgovor da, predložite konstrukciju jednog takvog skupa za općenite m i n.

Rješenje. Postoji. Ukoliko je $m = n = 0$, trivijalan primjer takvog PUS-a je $\emptyset$.

Ukoliko je $m = 0$, a $n \neq 0$, uzmemo nekih n različitih iracionalnih brojeva $x_1, \dots, x_n$ i definiramo uređaj $\trianglelefteq$ na skupu $X = \mathbb{Z} \cup A$, gdje je $A = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$x \trianglelefteq y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in A) \;\vee\; (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge x < y)$$

Na taj način smo očito definirali parcijalno uređen skup $(X, \trianglelefteq)$ koji ima točno n maksimalnih elemenata.

Na sličan način postupimo ako je $m \neq 0$, a $n = 0$. Uzmemo skup od m različitih iracionalnih brojeva $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ i definiramo uređaj $\trianglelefteq$ na $X = \mathbb{Z} \cup A$:

$$x \trianglelefteq y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x \in A \wedge y \in \mathbb{Z}) \;\vee\; (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge x < y)$$

Sad je $(X, \trianglelefteq)$ PUS s točno m minimalnih elemenata.

Ako je $m \neq 0$ i $n \neq 0$, uzmemo disjunktne skupove A i B s m, odnosno n elemenata. Definiramo uređaj $\trianglelefteq$ na $X = A \cup B$ na sljedeći način:

$$x \trianglelefteq y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x \in A \wedge y \in B)$$

Očito smo definirali PUS $(X, \trianglelefteq)$ s točno m minimalnih i točno n maksimalnih elemenata. ■

Zadatak 5. Postoji li parcijalno uređen skup koji nema ni najmanji ni najveći element, a ima točno jedan minimalni i prebrojivo mnogo maksimalnih?

Rješenje. Postoji. Neka je $A = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(1, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ i neka je $C = \left\{\sqrt{2}\right\}$. Definiramo uređaj $\trianglelefteq$ na skupu $X = A \cup B \cup C$:

$$x \trianglelefteq y \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; (x = (0, n) \in A \wedge y = (0, m) \in A \wedge n < m) \;\vee\; (x \in C \wedge y \in B)$$

Dobili smo PUS $(X, \trianglelefteq)$ u kojem ne postoji najveći ni najmanji element jer takav ne postoji ni u $(A, \trianglelefteq)$ (taj PUS je sličan sa $(\mathbb{Z}, \leqslant)$). Jedini minimalni element je $\sqrt{2}$, a svaki element iz B je maksimalan (a B je prebrojiv skup). ■

Zadatak 6. Neka je dan skup A s dvije binarne operacije $\times$ i $\circ$ na njemu koje su obje komutativne i asocijativne te za koje vrijedi $a \times (a \circ b) = a \circ (a \times b)$. Definiramo relaciju $\trianglelefteq$ na A s

$$a \trianglelefteq b \;\Leftrightarrow\; a \times b = a\,.$$

Dokažite da je $\trianglelefteq$ parcijalan uređaj!

Rješenje. Izgleda da je zadatak krivo zadan. Naime, uzmimo da je $A = \mathbb{Z}$, a obje operacije $\times$ i $\circ$ neka budu $+$ (zbrajanje cijelih brojeva). Očito su obje komutativne i asocijativne i vrijedi $a \times (a \circ b) = a \circ (a \times b)$.

Definirana relacija $\trianglelefteq$ očito nije refleksivna. Naime očito nije $1 \trianglelefteq 1$ jer je $1 + 1 \neq 1$. No, $\trianglelefteq$ nije ni irefleksivna jer je $0 \trianglelefteq 0$. Naime, doista je $0 + 0 = 0$. Prema tome, $\trianglelefteq$ nije ni refleksivan ni irefleksivan parcijalan uređaj. ∎

Zadatak 7. Funkcija $f : 2^{\mathcal{P}} \to 2^{\mathcal{P}}$, pri čemu je $\mathcal{P}$ skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima stupnja $\leqslant 2$ dana je s

$$f(S) = \big\{U(p(x)) \mid p(x) \in S\big\}$$

pri čemu je

$$U(p(x)) = \begin{cases} p'(x), & \text{ako je } \deg(p(x)) \neq 0, \\ p(x) \cdot x^2, & \text{ako je } \deg(p(x)) = 0. \end{cases}$$

Dokažite da je funkcija neprekidna te pronađite f-zatvorenje skupa $\{x\}$.

Rješenje. Neka su $Y \subseteq \mathcal{P}$ i $q(x) \in \mathcal{P}$ proizvoljni.

Pretpostavimo da je $q(x) \in f(Y) = \big\{U(p(x)) \mid p(x) \in Y\big\}$. Tad postoji $p(x) \in Y$ takav da je $q(x) = U(p(x))$. Neka je $A = \{p(x)\}$. Tad je to konačan podskup od Y i vrijedi $f(A) = \{U(p(x))\} = \{q(x)\}$. Prema tome, $q(x) \in f(A)$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji konačan $A \subseteq Y$ takav da je $q(x) \in f(A)$. Kako je $f(A) = \{U(p(x)) \mid p(x) \in A\} \subseteq \{U(p(x)) \mid p(x) \in Y\} = f(Y)$, to je $q(x) \in f(Y)$.

Dakle, funkcija f je skupovno neprekidna.

Definirajmo $\bar{f} : 2^{\mathcal{P}} \to 2^{\mathcal{P}}$ s $\bar{f}(Y) = \{x\} \cup f(Y)$. Prema teoremu s vježbi, f-zatvorenje od $\{x\}$ je skup $\operatorname{fix} \bar{f} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{f}^n(\varnothing)$.

$$\begin{aligned}
\bar{f}^0(\varnothing) &= \mathrm{id}(\varnothing) = \varnothing \\
\bar{f}^1(\varnothing) &= \{x\} \cup f(\varnothing) = \{x\} \\
\bar{f}^2(\varnothing) &= \bar{f}(\{x\}) = \{x\} \cup f(\{x\}) = \{x\} \cup \{1\} \\
\bar{f}^3(\varnothing) &= \bar{f}(\{1, x\}) = \{x\} \cup \{1, x^2\} \\
\bar{f}^4(\varnothing) &= \bar{f}(\{1, x, x^2\}) = \{x\} \cup \{1, 2x, x^2\} \\
\bar{f}^5(\varnothing) &= \{x\} \cup \{1, 2, 2x, x^2\} \\
\bar{f}^6(\varnothing) &= \{x\} \cup \{1, 2, 2x, x^2, 2x^2\} \\
\bar{f}^7(\varnothing) &= \{x\} \cup \{1, 2, 2x, 4x, x^2, 2x^2\}
\end{aligned}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{3n}(\varnothing) &= \bigcup_{0\leqslant k<n} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\} \\
\bar{f}^{3n+1}(\varnothing) &= \{2^n x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\} \\
\bar{f}^{3n+2}(\varnothing) &= \{2^n, 2^n x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}
\end{aligned}$$

Baza je provjerena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geqslant 1$. Tad imamo:

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{3(n+1)} &= \bar{f}\big(\bar{f}^{3n+2}\big) \\
&= \bar{f}\Big(\{2^n, 2^n x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}\Big) \\
&= \{x\} \cup \{2^n x^2, 2^n\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n} \{2^k x^2, 2^k, 2^{k+1} x\} \\
&= \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{3(n+1)+1} &= \bar{f}\big(\bar{f}^{3(n+1)}\big) \\
&= \bar{f}\Big(\bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}\Big) \\
&= \{x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k x^2, 2^k, 2^{k+1} x\} \\
&= \{2^{n+1} x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{3(n+1)+2} &= \bar{f}\big(\bar{f}^{3(n+1)+1}\big) \\
&= \bar{f}\Big(\{2^{n+1} x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}\Big) \\
&= \{x\} \cup \{2^{n+1}\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k x^2, 2^k, 2^{k+1} x\} \\
&= \{2^{n+1}, 2^{n+1} x\} \cup \bigcup_{0\leqslant k<n+1} \{2^k, 2^k x, 2^k x^2\}
\end{aligned}$$

Time je indukcija završena.

Sad očito slijedi da je f-zatvorenje od $\{x\}$ skup:

$$\operatorname{fix} \bar{f} = \varnothing \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{f}^n(\varnothing) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{2^n, 2^n x, 2^n x^2\}.$$

■

Zadatak 8. Funkcija $f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ dana je s

$$f(S) = \big\{J(x) \mid x \in S\big\}$$

pri čemu je $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija bitovnog cikličkog posmaka, odnosno

$$J\big((a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2\big) = (a_0 a_n a_{n-1} \dots a_1)_2 .$$

Je li funkcija f neprekidna? Postoji li $X \subseteq \mathbb{N}$, $|X| > 3$, takav da je f-zatvorenje od X konačan skup? Ako da, pronađite (najmanje) jedan takav X te njegovo f-zatvorenje.

Rješenje. Napomena: Originalno je u tekstu zadatka stajala očita greška u definiciji funkcije J. *Naime, pisalo je*

$$J\big((a_n a_{n-1} \dots a_0)_2\big) = (a_0 a_{n-1} a_{n-2} \dots a_n)_2 .$$

Čak i da zadržimo tako zadanu funkciju J, *prošla bi ista argumentacija za rješenje.* Neka su $Y \subseteq \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}$ proizvoljni.

Pretpostavimo da je $y \in f(Y) = \big\{J(x) \mid x \in Y\big\}$. Tad postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $y = J(x)$. Neka je $A = \{x\}$. Tad je to konačan podskup od Y i vrijedi $f(A) = \{J(x)\} = \{y\}$. Prema tome, $y \in f(A)$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji konačan $A \subseteq Y$ takav da je $y \in f(A)$. Kako je $f(A) = \{J(x) \mid x \in A\} \subseteq \{J(x) \mid x \in Y\} = f(Y)$, to je $y \in f(Y)$.

Dakle, funkcija f je skupovno neprekidna.

Pogledajmo što se događa ako uzmemo $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiramo $\bar{f}(S) = X \cup f(S)$ i tražimo $\operatorname{fix} \bar{f}$:

$$\bar{f}^0(\emptyset) = \mathrm{id}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\bar{f}^1(\emptyset) = \{1, 2, 3, 4\} \cup f(\emptyset) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{f}^2(\emptyset) = \bar{f}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cup f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Jasno je da će i svaka sljedeća iteracija funkcije $\bar{f}$ dati skup $\{1, 2, 3, 4\}$ pa zaključujemo da je $\operatorname{fix} \bar{f} = \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Zadatak 9. Funkcija $f : 2^{\mathbb{N}^2} \to 2^{\mathbb{N}^2}$ definirana je s $f(S) = RS$. Je li funkcija f neprekidna? Ako je neprekidna, pronađite f-zatvorenje od R.

Rješenje. Neka su $Y \subseteq \mathbb{N}^2$ i $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ proizvoljni.

Pretpostavimo da je $(x, y) \in f(Y) = RY$. Tad postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x\,R\,z$ i $z\,Y\,y$. Neka je $A = \{(z, y)\}$. Tad je to konačan podskup od Y i vrijedi $x\,RA\,y$. Prema tome, $(x, y) \in f(A)$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji konačan $A \subseteq Y$ takav da je $(x, y) \in f(A)$, tj. $x\,RA\,y$. Tad postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x\,R\,z$ i $z\,A\,y$. No, $A \subseteq Y$ pa je i $z\,Y\,y$. Prema tome, imamo $x\,RY\,y$, tj. $(x, y) \in f(Y)$.

Dakle, funkcija f je skupovno neprekidna.

Definirajmo $\bar{f} : 2^{\mathbb{N}^2} \to 2^{\mathbb{N}^2}$ s $\bar{f}(Y) = R \cup f(Y)$. Prema teoremu s vježbi, f-zatvorenje od R je skup $\operatorname{fix} \bar{f} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{f}^n(\emptyset)$.

$$\bar{f}^0(\emptyset) = \mathrm{id}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\bar{f}^1(\emptyset) = R \cup f(\emptyset) = R$$

$$\bar{f}^2(\emptyset) = \bar{f}(R) = R \cup f(R) = R \cup R^2$$

$$\bar{f}^3(\emptyset) = \bar{f}(R \cup R^2) = R \cup R(R \cup R^2)$$

Prvo pogledajmo što je $R(R \cup R^2)$:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in R(R \cup R^2) &\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N},\ x\,R\,z \text{ i } (z\,R\,y \text{ ili } z\,R^2\,y) \\
&\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N},\ (x\,R\,z \text{ i } z\,R\,y) \text{ ili } (x\,R\,z \text{ i } z\,R^2\,y) \\
&\Leftrightarrow x\,R^2\,y \text{ ili } x\,R^3\,y \\
&\Leftrightarrow x\,(R^2 \cup R^3)\,y
\end{aligned}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi $\overline{f}^n(\varnothing) = \bigcup_{k=1}^n R^k$. Bazu smo već provjerili. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geqslant 1$. Tad imamo:

$$\overline{f}^{n+1}(\varnothing) = \overline{f}\big(\overline{f}^n(\varnothing)\big) = \overline{f}\left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k\right) = R \cup R\left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k\right) = \bigcup_{k=1}^{n+1} R^k$$

Zaključivanje u zadnjem koraku je analogno onom za $R(R \cup R^2) = R^2 \cup R^3$. Ako bismo htjeli biti sasvim rigorozni, i to bismo mogli dokazati matematičkom indukcijom.

Konačno, imamo da je $\operatorname{fix} \overline{f} = \varnothing \cup \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^n R^k = R^+$. Dakle, f-zatvorenje od R je R^+. ■

Originalni dio

Zadatak 1 (10 bodova)**.** Relaciju $f \subseteq A \times B$ zovemo *funkcijom s A u B* i pišemo $f : A \to B$ ako za svaki $x \in A$ postoji $y \in B$ takav da je $(x, y) \in f$ i za sve $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ pretpostavka $(x, y_1) \in f$ i $(x, y_2) \in f$ povlači $y_1 = y_2$. Umjesto $(x, y) \in f$ obično pišemo $f(x) = y$.

Dokažite da je presjek, odnosno unija dvije funkcije $f_1, f_2 : A \to B$ funkcija s A u B ako i samo ako je $f_1 = f_2$.

Rješenje. Pretpostavimo da je $f_1 \cup f_2$ funkcija s A u B. Neka je $(x, y) \in f_1$ proizvoljan. Budući da je f_2 funkcija s A u B, postoji $y' \in B$ takav da je $(x, y') \in f_2$. No tad je $(x, y) \in (f_1 \cup f_2)$ i $(x, y') \in (f_1 \cup f_2)$ pa, budući da je $f_1 \cup f_2$ funkcija, imamo $y = y'$. Slijedi da je $(x, y) \in f_2$, tj. $f_1 \subseteq f_2$. Analogno, $f_2 \subseteq f_1$ pa je $f_1 = f_2$.

Pretpostavimo da je $f_1 \cap f_2$ funkcija s A u B i $(x, y) \in f_1$ proizvoljan. $f_1 \cap f_2$ je funkcija s A u B pa postoji $y' \in B$ takav da je $(x, y') \in (f_1 \cap f_2)$. Kako je $f_1 \cap f_2 \subseteq f_1$, imamo $(x, y') \in f_1$ pa zbog činjenice da je f_1 funkcija zaključujemo $y = y'$. Kako vrijedi i $f_1 \cap f_2 \subseteq f_2$, imamo $(x, y) = (x, y') \in f_2$. Analogno, $f_2 \subseteq f_1$ pa je $f_1 = f_2$.

Obrnuto, ako je $f_1 = f_2$, onda je $f_1 \cup f_2 = f_1 \cap f_2 = f_1 = f_2$ pa su sve navedene relacije funkcije s A u B. ■

Zadatak 2 (15 bodova)**.** Neka je $(A, \leqslant)$ parcijalno uređen skup koji *nije* dobro utemeljen. Pronađite svojstvo $\mathcal{P}$ takvo da za svaki $x \in A$ pretpostavka da za svaki $y < x$ vrijedi $\mathcal{P}(y)$ povlači $\mathcal{P}(x)$, i da postoji $z \in A$ takav da nije $\mathcal{P}(z)$. Drugim riječima, pokažite da za $(A, \leqslant)$ ne vrijedi princip indukcije.

Nadalje, dokažite da je parcijalni uređaj $(B, \leqslant)$ dobro utemeljen ako i samo ako svaki lanac u B ima najmanji element.

Rješenje. Budući da $(A, \leqslant)$ nije dobro utemeljen, postoji prebrojiv beskonačan strogo padajući lanac $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ Neka je $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Očito u S ne postoji minimalan element.

Neka je svojstvo $\mathcal{P}(x)$: $x \in A \backslash S$. Uzmimo proizvoljan $x \in A$ i pretpostavimo da za $y < x$ vrijedi $\mathcal{P}(y)$, tj. $y \in A \backslash S$. Kad bi bilo $x \in S$, tad bi x bio minimalan element u S, budući da su svi elementi koji su manji od x izvan S. No to je nemoguće pa je $x \in A \backslash S$, tj. vrijedi $\mathcal{P}(x)$.

Međutim, očito je S neprazan (beskonačan je) pa postoji $z \in S$. No, za taj z onda nije $\mathcal{P}(z)$.

Uzmimo sad parcijalno uređen skup $(B, \leqslant)$. Ako svaki lanac u B ima najmanji element, tad očito ne postoji prebrojiv beskonačan strogo padajući lanac u B (takav ne bi imao najmanji element). Prema tome, B je dobro utemeljen.

Obrnuto, pretpostavimo da je B dobro utemeljen i neka je $S \subseteq B$ proizvoljan neprazan podskup. Neka je $x_0 \in S$. Kad S ne bi imao minimalan element, za x_0 bi postojao $x_1 \in S$ takav da je $x_0 > x_1$. Dalje, za x_1 bi postojao $x_2 \in S$ takav da je $x_1 > x_2$. Koristeći aksiom izbora, na taj način konstruiramo strogo padajući lanac $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ u $S \subseteq A$. No to je nemoguće zbog dobre utemeljenosti A. Prema tome, S ima minimalan element.

Specijalno, svaki lanac $L \subseteq A$ ima minimalan element. No, ako je x minimalan u L, tad u L nema manjeg elementa od x. Kako su u L svi elementi usporedivi, to znači da su svi elementi u L koji su različiti od x veći od x. Prema tome, x je najmanji element u L. ■

Zadatak 3 (10 bodova)**.** Označimo s $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$ skup svih prostih brojeva. Neka je $f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ zadana s $f(S) = \{U(x) \mid x \in S\}$ gdje je

$$U(x) = \min(\mathcal{P} \backslash \{0, 1, \dots, x\}) .$$

Je li f neprekidna? Ako je, pronađite f-zatvorenje skupa $\{2\}$.

Rješenje. Neka su $Y \subseteq \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}$ proizvoljni.

Pretpostavimo da je $y \in f(Y)$. Tad postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $y = U(x)$. Prema tome, za $A = \{x\} \subseteq Y$ je $y \in f(A) = \{U(x)\} = \{y\}$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji konačan $A \subseteq Y$ takav da je $y \in f(A)$. Zbog $f(A) = \{U(x) \mid x \in A\} \subseteq \{U(x) \mid x \in Y\} = f(Y)$ imamo $y \in f(Y)$.

Definirajmo $\overline{f}(X) = \{2\} \cup f(X)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
\overline{f}^0(\varnothing) &= \mathrm{id}(\varnothing) = \varnothing \\
\overline{f}^1(\varnothing) &= \{2\} \cup f(\varnothing) = \{2\} \\
\overline{f}^2(\varnothing) &= \{2\} \cup f(\{2\}) = \{2, 3\} \\
\overline{f}^3(\varnothing) &= \{2\} \cup f(\{2, 3\}) = \{2, 3, 5\}
\end{aligned}$$

Dokažimo indukcijom da je $\overline{f}^n(\varnothing) = \{\text{prvih } n \text{ prostih brojeva}\}$. Bazu smo provjerili; pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

$$\overline{f}^{n+1}(\varnothing) = \{2\} \cup f(\{2, 3, 5, \dots, p_n\}) = \{2\} \cup \{3, 5, \dots, p_n, p_{n+1}\}$$

Time je indukcija završena.

Prema tome, zaključujemo da je f-zatvorenje skupa $\{2\}$ jednako $\operatorname{fix} \overline{f} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{f}^n(\varnothing) = \mathcal{P}$. ■