

# Matematička teorija računarstva

## Zadaća 2

Filip Nikšić  
fniksic@gmail.com

10. ožujka 2008.

### Originalni dio

**Zadatak 1.** Opišite riječima najmanje tri jezika te za njih konstruirajte regularne izraze.

*Rješenje.* Neka je  $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9, a, b, \dots, z\}$  skup koji sadrži znamenke i mala slova engleske abecede.

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ sadrži riječ } \text{filip} \text{ kao podriječ}\}$

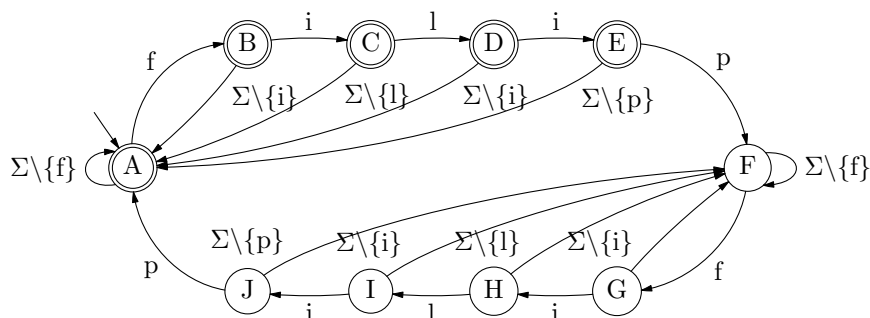
Regularan izraz za ovaj jezik je jednostavan:  $\Sigma^* \text{filip} \Sigma^*$ .

- $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{iza svake } 0 \text{ nalazi se točno jedna } 1\}$

Regularan izraz je opet jednostavan:  $1^*(01)^*$ .

- $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ sadrži paran broj pojava podriječi } \text{filip}\}$

Ovaj put regularan izraz nije toliko očit. No nije toliko teško konstruirati DKA koji prepoznaje  $L_3$ .



Konstruiramo skupovne jednadžbe ( $\Sigma \setminus x$  je skraćena oznaka za  $\Sigma \setminus \{x\}$ ):

$$\begin{aligned} A &= (\Sigma \setminus f)A + fB + \varepsilon & F &= (\Sigma \setminus f)F + fG \\ B &= (\Sigma \setminus i)A + iC + \varepsilon & G &= (\Sigma \setminus i)F + iH \\ C &= (\Sigma \setminus l)A + lD + \varepsilon & H &= (\Sigma \setminus l)F + lI \\ D &= (\Sigma \setminus i)A + iE + \varepsilon & I &= (\Sigma \setminus i)F + iJ \\ E &= (\Sigma \setminus p)A + pF + \varepsilon & J &= (\Sigma \setminus p)F + pA \end{aligned}$$

Uvrštavanjem unatrag J u I, pa I u H, pa H u G, pa G u F i korištenjem Ardenove leme otkrivamo da je

$$F = (\Sigma \setminus f + f(\Sigma \setminus i) + fi(\Sigma \setminus l) + fil(\Sigma \setminus i) + fili(\Sigma \setminus p))^* filipA$$

Nastavljamo uvrštavati unatrag: F u E, E u D, D u C, C u B i konačno B u A.

$$\begin{aligned} A &= (\Sigma \setminus f + f(\Sigma \setminus i) + fi(\Sigma \setminus l) + fil(\Sigma \setminus i) + fili(\Sigma \setminus p))A \\ &\quad + filip(\Sigma \setminus f + f(\Sigma \setminus i) + fi(\Sigma \setminus l) + fil(\Sigma \setminus i) + fili(\Sigma \setminus p))^* filipA \\ &\quad + fili + fil + fi + f + \varepsilon \end{aligned}$$

Još jednim iskorištavanjem Ardenove leme dobivamo konačan regularan izraz. Zbog kraćeg zapisa uvodimo oznaku  $\Lambda = (\Sigma \setminus f + f(\Sigma \setminus i) + fi(\Sigma \setminus l) + fil(\Sigma \setminus i) + fili(\Sigma \setminus p))$ .

$$A = (\Lambda + filip\Lambda^* filip)^*(fili + fil + fi + f + \varepsilon)$$

■

**Zadatak 2** (10 bodova). Riješite sustav skupovnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon + dV + a\Lambda + gU \\ V &= fU + eV \\ \Lambda &= cU + b\Lambda \end{aligned}$$

*Rješenje.* Prvo izražavamo V i  $\Lambda$  preko U i uvrštavamo to u jednadžbu za U:

$$\begin{aligned} V &= e^*fU \\ \Lambda &= b^*cU \\ U &= \varepsilon + de^*fU + ab^*cU + gU \end{aligned}$$

Korištenjem Ardenove leme dobivamo U pa to koristimo da dobijemo V i  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} U &= (de^*f + ab^*c + g)^* \\ V &= e^*f(de^*f + ab^*c + g)^* \\ \Lambda &= b^*c(de^*f + ab^*c + g)^* \end{aligned}$$

■

**Zadatak 3** (20 bodova). Neka su  $\Sigma$  i  $\Gamma$  dvije (ne nužno različite) abecede i neka je  $f: \Sigma \rightarrow \Gamma^*$  proizvoljna funkcija. Proširimo  $f$  na riječi nad abecedom  $\Sigma$ :

$$f(\varepsilon) := \varepsilon, \quad f(w_1 w_2 \dots w_n) := f(w_1) f(w_2) \dots f(w_n), \quad w_1, \dots, w_n \in \Sigma$$

Dokažite ili opovrgnite: Za regularan jezik  $L \subseteq \Sigma^*$  slika  $f(L) := \{f(v) \mid v \in L\}$  je također regularan jezik.

*Rješenje.* Definirajmo transformaciju regularnog izraza  $R$  nad  $\Sigma$  u regularan izraz  $R'$  nad  $\Gamma$  na sljedeći način: za sve  $x \in \Sigma$  svaku pojavu znaka  $x$  u  $R$  zamijenimo sa  $f(x)$ .

Indukcijom po duljini izraza  $R$  dokazujemo da je  $L(R') = f(L(R))$ . Za  $R = \emptyset$  i  $R = \varepsilon$  tvrdnja očito vrijedi. Za  $R = x$  gdje je  $x \in \Sigma$  je  $R' = f(x)$  pa zbog  $f(L(x)) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = L(f(x))$  tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve regularne izraze čija je duljina manja od  $n$  za neki  $n > 1$ . Neka je  $R$  izraz duljine  $n$ . Tad je  $R$  oblika  $R_1 + R_2$ ,  $R_1 R_2$  ili  $R_1^*$ .

U prvom slučaju  $R'$  je očito oblika  $R'_1 + R'_2$ . Vrijedi

$$f(L(R)) = f(L(R_1 + R_2)) = f(L(R_1) \cup L(R_2)) = f(L(R_1)) \cup f(L(R_2)).$$

Duljina  $R_1$  i  $R_2$  strogo je manja od  $n$  pa po pretpostavci indukcije dalje vrijedi

$$f(L(R)) = L(R'_1) \cup L(R'_2) = L(R'_1 + R'_2) = L(R').$$

U slučaju kad je  $R$  oblika  $R_1 R_2$  očito je  $R'$  oblika  $R'_1 R'_2$ . Imamo:

$$f(L(R)) = f(L(R_1 R_2)) = f(L(R_1) L(R_2))$$

Zbog definicije funkcije  $f$  vrijedi  $f(uv) = f(u)f(v)$  gdje su  $u$  i  $v$  riječi iz  $\Sigma^*$ . To povlači  $f(L(R_1) L(R_2)) = f(L(R_1)) f(L(R_2))$  pa uvažavajući i pretpostavku indukcije vrijedi:

$$f(L(R)) = L(R'_1) L(R'_2) = L(R'_1 R'_2) = L(R').$$

Treći slučaj je zbog definicije zvijezde kombinacija prethodna dva pa se dokazuje analogno.

Tvrdnja zadatka sad direktno slijedi iz dokazanog. Naime, za regularan jezik  $L$  koji je opisan regularnim izrazom  $R$ , slika  $f(L)$  je opisana regularnim izrazom  $R'$  pa je ona također regularan jezik. ■

**Zadatak 4** (15 bodova). Dokaži ili opovrgni: regularni izrazi  $R = a^*(ba + aa)^*$ ,  $S = a^*(ba(aa)^*)^*$  i  $T = a^*(ba(aa + ba)^* + \varepsilon)$  svi opisuju isti regularan jezik.

*Rješenje.* Dokažimo da  $R$  i  $S$  opisuju iste jezike. Naime, neka je  $w$  riječ iz jezika opisanog izrazom  $R = a^*(aa + ba)^*$ . Ukoliko  $w$  ne sadrži znak  $b$ , očito je  $w \in a^* \subseteq a^*(ba(aa)^*)^*$ . Ako  $w$  sadrži  $b$ , onda je  $w$  oblika

$$w = a^k (aa)^{l_1} (ba)^{m_1} \dots (aa)^{l_n} (ba)^{m_n} (aa)^{l_{n+1}}$$

pri čemu je BSO  $m_i \neq 0$ . (Ako je  $m_i = 0$ , spojimo  $(aa)^{l_i}(aa)^{l_{i+1}} = (aa)^{l_i+l_{i+1}}$ .) Sad imamo:

$$\begin{aligned} w &= a^{k+2l_1} (ba)^{m_1-1} (ba(aa)^{l_2}) \dots (ba)^{m_n-1} (ba(aa)^{l_{n+1}}) \\ &\in a^*(ba(aa)^*)^{m_1-1} (ba(aa)^*) \dots (ba(aa)^*)^{m_n-1} (ba(aa)^*) \\ &= a^*(ba(aa)^*)^{m_1+\dots+m_n} \\ &\subseteq a^*(ba(aa)^*)^* \end{aligned}$$

Obrnuto je lakše. Naime

$$aa \subseteq ba + aa \implies (aa)^* \subseteq (ba + aa)^*.$$

Nadalje,  $ba \subseteq ba + aa$  pa imamo

$$\begin{aligned} ba(aa)^* &\subseteq (ba + aa)(ba + aa)^* \subseteq (ba + aa)^* \\ (ba(aa)^*)^* &\subseteq ((ba + aa)^*)^* = (ba + aa)^* \\ a^*(ba(aa)^*)^* &\subseteq a^*(ba + aa)^* \end{aligned}$$

Dokažimo da  $S$  i  $T$  opisuju iste jezike. Prvo pokažimo da je  $(ba(aa)^*)^k \subseteq ba(ba + aa)^*$  za svaki  $k > 0$ . Naime, za  $k = 1$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi za neki  $k > 0$ . Tad je

$$\begin{aligned} (ba(aa)^*)^{k+1} &= (ba(aa)^*)^k ba(aa)^* \\ &\subseteq ba(ba + aa)^* ba(aa)^* \\ &\subseteq ba(ba + aa)^* (ba + aa)(ba + aa)^* \\ &\subseteq ba(ba + aa)^* \end{aligned}$$

Iz ovog zaključujemo da je

$$\begin{aligned} (ba(aa)^*)^* &\subseteq ba(ba + aa)^* + \varepsilon \\ a^*(ba(aa)^*)^* &\subseteq a^*(ba(ba + aa)^* + \varepsilon) \end{aligned}$$

U obratnom slučaju pokažimo da je  $ba(aa + ba)^* \subseteq (ba(aa)^*)^*$ . Naime, riječ  $w$  iz jezika s lijeve strane je oblika

$$w = ba(aa)^{k_1} (ba)^{l_1} \dots (aa)^{k_n} (ba)^{l_n} (aa)^{k_{n+1}}$$

s tim da kao i u prvom dijelu zadatka možemo BSO pretpostaviti  $l_i \neq 0$ . Daljnje zaključivanje je također sasvim analogno onom u prvom dijelu zadatka. Imamo  $w \in (ba(aa)^*)^*$ . Kad sve skupimo dobijemo:

$$\begin{aligned} ba(aa + ba)^* + \varepsilon &\subseteq (ba(aa)^*)^* \\ a^*(ba(aa + ba)^* + \varepsilon) &\subseteq a^*(ba(aa)^*)^* \end{aligned}$$

■