

1. Da li je jezik $L = \{a^n b^{2n} c^{3n} : n \in \mathbb{N}\}$ regularan?

Rješenje

Pretpostavimo da je L regularan. Tada prema lemi o pumpanju postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq n$ postoje x, y, z takvi da je

- $a^k b^{2k} c^{3k} = xyz$
- $|y| > 0$
- $|xy| \leq 6n$
- $\forall i \geq 0, xy^i z \in L$

Za y imamo slijedeće slučajeve:

- (a) $y = a^l, l \in \mathbb{N}$. Tada bi dobili da je $a^{t+il} b^{2k} c^{3k} \in L, \forall i \in \mathbb{N}$, a to je nemoguće.
- (b) $y = a^{l_1} b^{l_2}, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Taj slučaj je također nemoguć, jer bi u $xy^i z$, za $i \geq 2$ imali znak a koji dolazi nakon znaka b .
- (c) $y = b^l, l \in \mathbb{N}$. Tada bi dobili $a^k b^{t+il} c^{3k} \in L, \forall i \in \mathbb{N}$, a to je nemoguće.
- (d) $y = b^{l_1} c^{l_2}, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Slično kao i u (b), dobili bi b nakon c u $xy^i z$, $i \geq 2$.
- (e) $y = c^l, l \in \mathbb{N}$. Tada bi bilo $a^k b^{2k} c^{il+t} \in L, \forall i \in \mathbb{N}$, a to je opet nemoguće.

Prema tome, L nije regularan jezik.

2. Naći PDA koji prepoznaje jezik

$$L = \{\omega \in (a + b + c)^* : |\omega|_a = |\omega|_b + |\omega|_c\}.$$

Rješenje

$\langle q_0, a, S, q_0, aS \rangle$
 $\langle q_0, b, S, q_1, bS \rangle$
 $\langle q_0, c, S, q_1, bS \rangle$
 $\langle q_0, a, a, q_0, aa \rangle$
 $\langle q_0, b, a, q_0, \varepsilon \rangle$
 $\langle q_0, c, a, q_0, \varepsilon \rangle$
 $\langle q_1, a, b, q_0, \varepsilon \rangle$

$\langle q_1, b, b, q_1, bb \rangle$

$\langle q_1, c, b, q_1, bb \rangle$

3. Konstruirati Turingov stroj koji prepoznaje jezik

$$L = \{\omega \in (a+b)^* : |\omega|_a = n, |\omega|_b = n+1, n \geq 0\}$$

Rješenje

$\Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{\Lambda, x, a, b\}, Q = \{q_1, A, B, B', AB, ACCEPT, REJECT\}$

q_1 - početno stanje

ACCEPT - prihvatajuće stanje

REJECT - odbijajuće stanje

Početna pozicija TS-a se nalazi krajnje lijevo na traci. Za tranzitnu funkciju δ vrijedi slijedeće:

$$\delta(q_1, a) = (A, x, D)$$

$$\delta(q_1, b) = (B, x, D)$$

$$\delta(q_1, x) = (q_1, x, D)$$

$$\delta(q_1, \Lambda) = (REJECT, \Lambda, S)$$

$$\delta(A, a) = (A, a, D)$$

$$\delta(A, b) = (AB, x, D)$$

$$\delta(A, x) = (A, x, D)$$

$$\delta(A, \Lambda) = (REJECT, \Lambda, S)$$

$$\delta(B, a) = (AB, x, D)$$

$$\delta(B, b) = (B', b, D)$$

$$\delta(B, x) = (B, x, D)$$

$$\delta(B, \Lambda) = (ACCEPT, \Lambda, S)$$

$$\delta(B', a) = (AB, x, D)$$

$$\delta(B', b) = (B', b, D)$$

$$\delta(B', x) = (B', x, D)$$

$$\delta(B', \Lambda) = (REJECT, \Lambda, S)$$

$$\delta(AB, a) = (AB, a, L)$$

$$\delta(AB, b) = (AB, b, L)$$

$$\delta(AB, x) = (AB, x, L)$$

$$\delta(AB, \Lambda) = (q_1, \Lambda, D)$$