

Matematička teorija računarstva

Zadaća 3

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

13. svibnja 2008.

Originalni dio

Zadatak 1 (10 bodova). Zadan je jezik

$$L = \{w \mid w \in \mathbf{aa}(\mathbf{ba})^*\mathbf{cc} \cup \mathbf{cc}(\mathbf{ba})^*\mathbf{aa}\}.$$

Je li L regularan?

Rješenje. Ovo je jednostavan zadatak koji provjerava osnovno razumijevanje gradiva. Budući da je jezik zadan regularnim izrazom, nužno je regularan. Nema potrebe za primjenom leme o pumpanju, a ne mora se ni konstruirati konačan automat. ■

Zadatak 2 (20 bodova). Zadan je jezik

$$L = \{ww^{\mathcal{R}}u \mid w, u \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^+\}.$$

Je li L regularan? Je li kontekstno slobodan?

Rješenje. Intuitivno je jasno da L nije regularan jezik. Prvi pokušaj za dokazivanje neregularnosti bila bi primjena leme o pumpanju. Nažalost, za $p = 4$ svaka riječ iz L duljine barem p zadovoljava uvjete leme.

To bi nas moglo navesti da pomislimo da je L regularan, međutim, pogledajmo reziduale od L :

$$\begin{aligned} L_0 &:= \mathbf{a}^{-1}L = \{ww^{\mathcal{R}}\mathbf{a}u \mid w \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^*, u \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^+\} \\ L_1 &:= \mathbf{b}^{-1}L_0 = \{ww^{\mathcal{R}}\mathbf{b}au \mid w \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^*, u \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^+\} \\ L_2 &:= \mathbf{a}^{-1}L_1 = \{ww^{\mathcal{R}}\mathbf{ab}au \mid w \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^*, u \in (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^+\} \end{aligned}$$

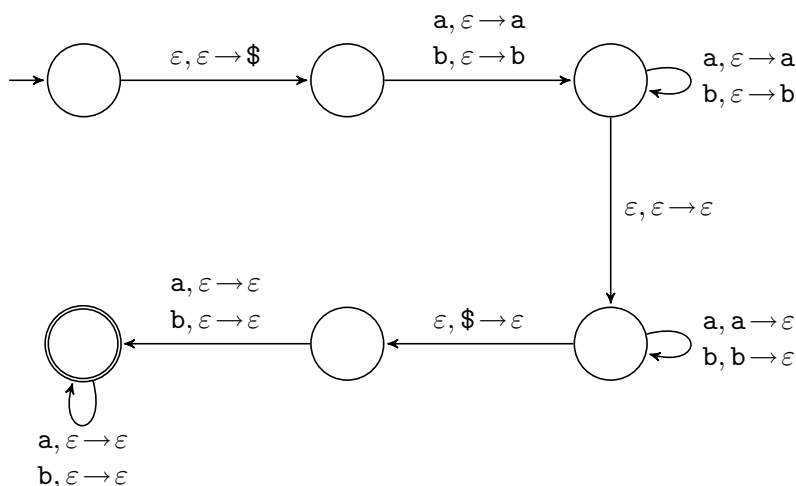
Dalje rekursivno definiramo niz jezika $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} L_{2k+1} &:= \mathbf{b}^{-1}L_{2k} \\ L_{2k+2} &:= \mathbf{a}^{-1}L_{2k+1} \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}$$

Indukcijom se lako pokaže da jezici imaju oblik koji se naslućuje u prva tri primjera. Iz toga je jasno da je najmanja duljina riječi iz L_n jednaka $n + 2$ pa slijedi da su svi ti jezici različiti.

Budući da je svaki od jezika L_n rezidual jezika L , zaključujemo da L ima beskonačno mnogo reziduala pa nije regularan.

Da bismo pokazali da je L kontekstno slobodan, konstruiramo PDA koji ga prepoznaje. (Vidi sliku 1.)



Slika 1: PDA iz zadatka 2.

■

Zadatak 3 (20 bodova). Konstruirajte Turingov stroj koji za riječ iz $1(0 \cup 1)^*$ (broj zapisan u binarnom sustavu) ponavlja sljedeće:

1. Ako je na traci zapisan broj 1, prihvati ulaz i završi s radom.
2. Ako je na traci zapisan paran broj, podijeli ga s 2, inače ga pomnoži s 3 i dodaj mu 1.
3. Vрати se na prvi korak.

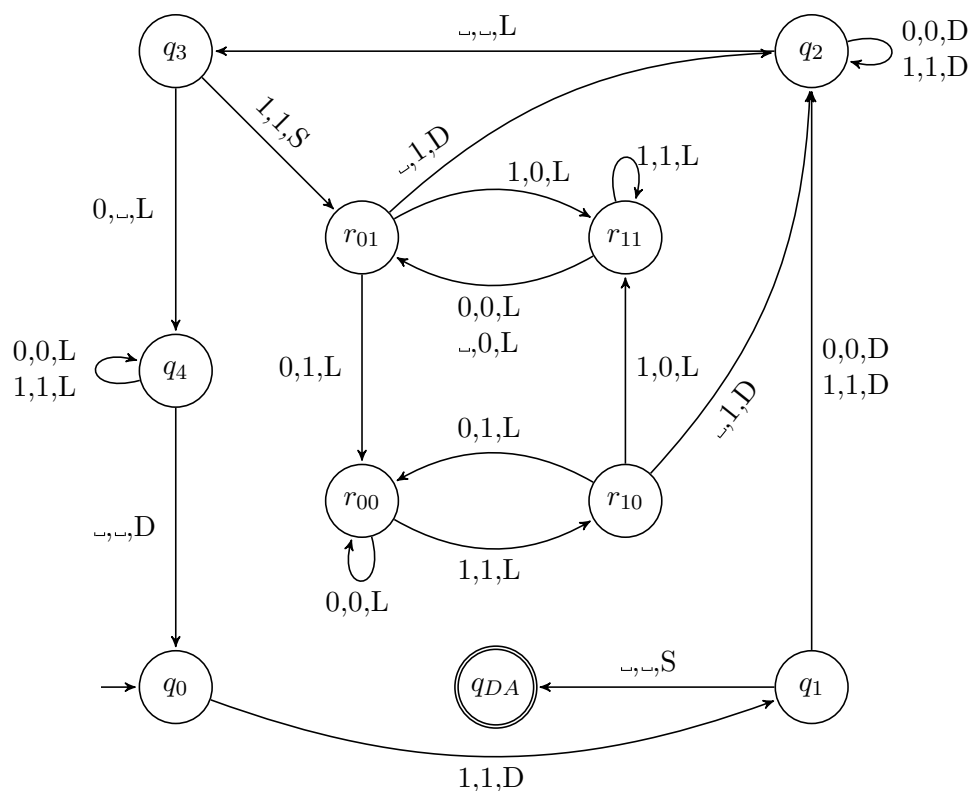
Početna pozicija glave je na krajnjem lijevom znaku ulaza.

Bonus: Za dodatnih 30 bodova dokažite da TS prihvaća svaku riječ iz $1(0 \cup 1)^*$.

Rješenje. Turingov stroj vidi se na slici 2.

U stanju q_0 glava se nalazi iznad jedinice sasvim lijevo. Stroj pročitа tu jedinicu i prijeđe u q_1 . Ukoliko više nema znamenaka (naiđe na $_$), prihvaća ulaz, inače se pozicionira na krajnju desnu znamenku (stanje q_2 i prijelaz u q_3).

Ukoliko je zadnja znamenka 0, broj je paran. Dijelimo ga s 2 brisanjem dotične znamenke (prijelaz u q_4). Stroj se zatim opet pozicionira na krajnju lijevu znamenku i kreće ispočetka iz q_0 .



Slika 2: Turingov stroj iz zadatka 3.

Ukoliko je zadnja znamenka 1, broj je neparan. Prelazimo u središnji dio stroja označen stanjima r_{00} , r_{01} , r_{10} , r_{11} . Taj dio stroja množi broj s 3 i uvećava ga za 1. Ideja je sljedeća: ako označimo broj s n , dodaj mu $2n + 1$. Primjer:

$$\begin{array}{r}
 101101011 \\
 101101011 \\
 \hline
 10001000010
 \end{array}$$

Oznake stanja su sugestivne: r_{ij} znači da je prethodna znamenka pri prolasku preko broja zdesna nalijevo bila i , i da imamo prijelaz j . Zbrojimo trenutnu znamenku s i i j da dobijemo najviše dvoznamenkasti broj—prva znamenka je novi prijelaz, a drugu zapisujemo na traku. Imamo sve informacije za prijelaz u novo stanje.

Kad središnji dio stroja obavi svoje, vraćamo se u stanje q_2 kako bismo se opet pozicionirali na krajnju desnu znamenku. (Naime, nakon množenja i uvećavanja nije potrebno provjeravati je li na traci zapisan broj 1.)

Bonus dio ostaje čitatelju za zabavu. :-)

■