Brza evaluacija nekih funkcija primjenom verižnih razlomaka

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

PMF—Matematički odjel

Aritmetički i algebarski algoritmi
15. srpnja 2008.

Pregled

Verižni razlomci (1)

- Konačan verižni razlomak je izraz oblika

$$\frac{A_k}{B_k} = \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{\ddots + \cfrac{p_k}{q_k}}}}$$

- To kompaktnije zapisujemo

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{p_1}{q_1+}\,\frac{p_2}{q_2+}\cdots\frac{p_k}{q_k}$$

Verižni razlomci (2)

A_k i B_k mogu se dobiti iz rekurzija:

$$\begin{aligned} A_i &= q_i A_{i-1} + p_i A_{i-2}, \\ B_i &= q_i B_{i-1} + p_i B_{i-2}, \quad i = 2, 3, \ldots, k \end{aligned}$$

s početnim vrijednostima

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= p_1, \\ B_0 &= 1, & B_1 &= q_1 \end{aligned}$$

Verižni razlomci od interesa

- Od interesa su nam verižni razlomci za koje je $p_i, q_i \in \{1, \frac{1}{2}\}$ jer tad u prethodnim rekurzijama imamo samo "kratke" operacije: zbrajanje i "shift".
- Može se pokazati ([1]) da se svaki broj iz segmenta $[(\sqrt{2} - 1)/2, \sqrt{2}]$ može razviti u verižni razlomak tog oblika.
- Uočimo da $[(\sqrt{2} - 1)/2, \sqrt{2}]$ sadrži $[\frac{1}{2}, 1]$, segment u kojem su svi brojevi s normaliziranim floating-point zapisom.

Generalizirani verižni razlomak

- Generaliziranim verižnim razlomkom smatramo niz transformacija oblika

$$f_k(x) = \frac{p_k}{q_k + f_{k+1}(x)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Glavni zahtjev kod ovakvog razvoja je da, ukoliko je f_k definirana na intervalu $[m, M]$, to bude i f_{k+1}.
- Ukoliko je taj zahtjev ispunjen za svaki k, kažemo da imamo *funkcionalnu konzistenciju*.

Konvergencija

Teorem

Neka je

$$f_1(x) = \frac{A}{B} = \frac{p_1}{q_1+} \frac{p_2}{q_2+} \cdots \frac{p_n}{q_n + f_{n+1}(x)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

razvoj $f_1(x)$ u verižni razlomak s pozitivnim p_i i q_i i pretpostavimo da postoji funkcionalna konzistencija. Neka je A_n/B_n n-ta konvergenta razlomka.
Tad za svaki $\varepsilon > 0$ postoji N takav da za svaki $n > N$ vrijedi

$$\delta_n = \left| \frac{A}{B} - \frac{A_n}{B_n} \right| < \varepsilon \,.$$

Ekstremne vrijednosti

Teorem

Neka je n-ta konvergenta razvoja $f_1(x)$ u verižni razlomak

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{p_1}{q_1+} \frac{p_2}{q_2+} \cdots \frac{p_n}{q_n}$$

i neka su $p_i, q_i \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Tad vrijedi:

$$M = \max f_1(x) = \max \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \sqrt{2}$$

$$m = \min f_1(x) = \min \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = (\sqrt{2} - 1)/2\,.$$

Kvadratna jednadžba

- Na primjeru kvadratne jednadžbe oblika

$$ax^2 + bx - c = 0, \qquad a > 0, b \geqslant 0, c > 0$$

  s dva različita realna rješenja suprotnih predznaka demonstriramo stvaranje algoritma za dobivanje razvoja pozitivnog rješenja u verižni razlomak.
- Konkretno, pokazujemo kako dobiti skup pravila za izbor $p_i, q_i \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ u svakom koraku.
- Kao specijalan slučaj dobit ćemo brz algoritam za evaluaciju kvadratnog korijena.

Supstitucija (1)

- Supstituiramo

$$x_k = \frac{p_k}{q_k + x_{k+1}}, \qquad p_k, q_k \in \{\frac{1}{2}, 1\}$$

u k-tu kvadratnu jednadžbu:

$$a_k \frac{p_k^2}{(q_k + x_{k+1})^2} + b_k \frac{p_k}{q_k + x_{k+1}} - c_k = 0$$

što je ekvivalentno

$$c_k x_{k+1}^2 + (2c_k q_k - b_k p_k) x_{k+1} + c_k q_k^2 - a_k p_k^2 - b_k p_k q_k = 0$$

- Dakle, x_{k+1} je rješenje $(k+1)$-te jednadžbe

$$a_{k+1} x_{k+1}^2 + b_{k+1} x_{k+1} - c_{k+1} = 0$$

Supstitucija (2)

- Iz toga slijedi rekurzija:

$$\begin{aligned} \lambda a_{k+1} &= c_k \\ \lambda b_{k+1} &= 2c_k q_k - b_k p_k \\ \lambda c_{k+1} &= -c_k q_k^2 + (a_k p_k + b_k q_k) p_k \end{aligned}$$

pri čemu je λ konstanta koja služi za normalizaciju.

- Da bismo postigli funkcionalnu konzistenciju stavljamo uvjet

$$m \leqslant x_k \leqslant M, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Izbor p_k i q_k (1)

Pokažimo sad kako izabrati p_k i q_k. Naime, početnu kvadratnu jednadžbu pišemo u obliku:

$$x_1 = \frac{c_1}{b_1 + a_1 x_1}, \qquad a_1 > 0, b_1 \geqslant 0, c_1 > 0, m \leqslant x_1 \leqslant M$$

Tražimo $p_1, q_1 \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ tako da bude

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1 + x_2} \quad \text{i} \quad m \leqslant x_2 \leqslant M\,.$$

Imamo 4 mogućnosti. Pretpostavimo $m \leqslant x_2 \leqslant M$ i pogledajmo koje dolaze u obzir.

Izbor p_k i q_k (2)

- $m \leqslant x_2 \leqslant M$ je ekvivalentno s
$$\frac{p_1}{q_1 + M} \leqslant x_1 \leqslant \frac{p_1}{q_1 + m}$$
To znači da, ukoliko je x_1 u navedenom intervalu za neki izbor p_1 i q_1, odabir tih p_1 i q_1 će osigurati $m \leqslant x_2 \leqslant M$.
- Uvrštavanjem sve 4 mogućnosti dobivamo 4 intervala koji zajedno pokrivaju $[m, M]$. Stoga je x_1 barem u jednom od njih.

Izbor p_k i q_k (3)

Budući da je x_1 nepoznanica u prvoj kvadratnoj jednadžbi, uvjet da se nalazi u intervalu $[p_1/(q_1 + M), p_1/(q_1 + m)]$ izražavamo preko koeficijenata jednadžbe:

$$\frac{p_1}{q_1 + M} b_1 + \frac{p_1^2}{(q_1 + M)^2} a_1 \leqslant c_1 \leqslant \frac{p_1}{q_1 + m} b_1 + \frac{p_1^2}{(q_1 + m)^2} a_1$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za p_1, q_1, m i M dobivamo konkretan skup pravila koja sumiramo na sljedećem slajdu.

Pravila za izbor p_1 i q_1

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}b_1 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 a_1 \leqslant c_1 \leqslant (\sqrt{2}-1)b_1 + (\sqrt{2}-1)^2 a_1$$

$$\Rightarrow \text{ biraj } p_1 = 1/2, q_1 = 1$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{7}b_1 + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}\right)^2 a_1 \leqslant c_1 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}b_1 + \frac{1}{2}2a_1$$

$$\Rightarrow \text{ biraj } p_1 = 1/2, q_1 = 1/2$$

$$(\sqrt{2}-1)b_1 + (\sqrt{2}-1)^2 a_1 \leqslant c_1 \leqslant 2(\sqrt{2}-1)b_1 + 4(\sqrt{2}-1)^2 a_1$$

$$\Rightarrow \text{ biraj } p_1 = 1, q_1 = 1$$

$$\frac{4\sqrt{2}-2}{7}b_1 + \left(\frac{4\sqrt{2}-2}{7}\right)^2 a_1 \leqslant c_1 \leqslant \sqrt{2}b_1 + 2a_1$$

$$\Rightarrow \text{ biraj } p_1 = 1, q_1 = 1/2$$

Jednostavnija pravila (1)

- Prvo primijetimo da je dovoljno provjeravati samo jednu od nejednakosti u navedenim pravilima, recimo gornju.
- Zatim u igru dolazi ključna stvar – navedena 4 intervala se preklapaju. Ako je x_1 u više od jednog intervala, imamo slobodu izbora p_1 i q_1. No to nam omogućuje i da modificiramo granice intervala tako da imaju jednostavniji binarni zapis.

Jednostavnija pravila (2)

$$
\begin{aligned}
c_k &\leqslant 0.375 b_k + 0.15625 a_k && \Rightarrow p_k = 1/2, q_k = 1 \\
c_k &\leqslant 0.625 b_k + 0.5 a_k && \Rightarrow p_k = 1/2, q_k = 1/2 \\
c_k &\leqslant 0.75 b_k + 0.625 a_k && \Rightarrow p_k = 1, q_k = 1 \\
&\text{inače} && \Rightarrow p_k = 1, q_k = 1/2
\end{aligned}
$$

Algoritam

Konačno, dajemo algoritam kojim zaključujemo primjer rješavanja kvadratne jednadžbe. Počinjemo s $k = 1$.

1. Dana je k-ta jednadžba, pronađi p_k i q_k pomoću pravila izbora.
2. Napravi iteraciju rekurzija za A_k i B_k.
3. Napravi iteraciju rekurzije za koeficijente $(k+1)$-te jednadžbe.
4. Provjeri je li A_k/B_k dostigao željenu preciznost. Ako nije, vrati se na korak 1 za $k+1$.

Riccatijeva jednadžba

- Riccatijeva jednadžba je diferencijalna jednadžba oblika

$$f_1' + a_1 f_2^2 + b_1 f_1 + c_1 = 0$$

pri čemu je $f_1(x)$ funkcija varijable x, a a_1, b_1 i c_1 su funkcije ili konstante.

- Njeno svojstvo je da ukoliko f_1 zamijenimo s $\frac{p_1}{q_1+f_2}$, tad i f_2 zadovoljava Riccatijevu jednadžbu. Daljnjim iteriranjem dobijemo niz Riccatijevih jednadžbi

$$f_k' + a_k f_k^2 + b_k f_k + c_k = 0\,.$$

- Budući da su mnoge elementarne funkcije rješenja Riccatijeve jednadžbe, kad bismo imali algoritam za razvoj njenih rješenja u verižne razlomke, mogli bismo pomoću toga brzo evaluirati te elementarne funkcije.

Supstitucija

- Pretpostavimo da je y_k rješenje k-te Riccatijeve jednadžbe i supstituirajmo

$$y_k = \frac{p_k}{q_k + y_{k+1}}, \qquad p_k, q_k \in \{\frac{1}{2}, 1\}$$

- Slično kao kod kvadratne jednadžbe dobijemo rekurziju za koeficijente $(k+1)$-te jednadžbe:

$$a_{k+1} = -\frac{c_k}{p_k}$$

$$b_{k+1} = -b_k - \frac{2c_k q_k}{p_k}$$

$$c_{k+1} = -a_k p_k - b_k q_k - \frac{c_k q_k^2}{p_k}$$

- Primijetimo da se u rekurziji koriste samo "kratke" operacije.

Rješenje Riccatijeve jednadžbe (1)

Teorem

Za Riccatijeve jednadžbe čiji koeficijenti su dani prethodnom rekurzijom vrijedi da je $\Delta = b_k^2 - 4a_k c_k$ neovisan o k (tj. za sve jednadžbe je isti).

- Rješenje Riccatijeve jednadžbe ovisi o Δ.
- Neka je $y' + ay^2 + by + c = 0$ Riccatijeva jednadžba. Zapišemo je kao:

$$\frac{dy}{ay^2 + by + c} = -dx$$

  Integriranjem dobijemo rješenje.
- Iz prethodnog teorema slijedi da će sve jednadžbe u nizu imati isti oblik rješenja.

Rješenje Riccatijeve jednadžbe (2)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{ay^2 + by + c} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{2ay + b - \sqrt{\Delta}}{2ay + b + \sqrt{\Delta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \mathrm{arth} \frac{b + 2ay}{\sqrt{\Delta}} && \text{ako } \Delta > 0 \\
&= \frac{-2}{b + 2ay} && \text{ako } \Delta = 0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \mathrm{arctg} \frac{2ay + b}{\sqrt{-\Delta}} && \text{ako } \Delta < 0
\end{aligned}
$$

Funkcija tg (1)

- Za funkciju $y = \mathrm{tg} x$ znamo da je rješenje Riccatijeve jednadžbe:
$$y' = y^2 + 1, \qquad y(0) = 0\,.$$
- Primijetimo $\Delta = -4 < 0$.
- Primijenimo bilinearnu transformaciju i iz rekurzije dobijemo koeficijente k-te Riccatijeve jednadžbe. Zbog teorema u svakom koraku je $\Delta = -4 < 0$ pa je u k-tom koraku rješenje:
$$-x_k - d_k = \mathrm{arctg}\frac{2a_k y_k + b_k}{2}\,.$$
- Stoga je
$$y_k = -\frac{b_k}{2a_k} - \frac{1}{a_k}\mathrm{tg}(x_k + d_k)$$
- Kad bismo razvili skup pravila za $\mathrm{tg} x$, pomoću ovog bismo mogli evaluirati funkciju.

Amnon Bracha-Barak.
Application of Continued Fractions for Fast Evaluation of Certain Functions on a Digital Computer.
IEEE Transactions on Computers, 23(3):301–309, Mar 1974.