Metoda slična Jacobijevoj za izračunavanje svojstvenih vrijednosti proizvoljne matrice

Filip Nikšić
fniksic@gmail.com

PMF—Matematički odjel

Numerički algoritmi
11. srpnja 2008.

Pregled

Jacobijeva metoda

Jacobijeva metoda izračunava svojstvene vrijednosti simetrične (hermitske) matrice A:

- Generira se niz ortogonalnih (unitarnih) transformacija U_i tako da, uz $U = \prod_i U_i$, matrica U^*AU bude približno dijagonalna, s aproksimacijama svojstvenih vrijednosti na dijagonali.
- Bazira se na teoremu da postoji unitarna matrica U takva da je U^*AU dijagonalna ako i samo ako je A normalna ($AA^* = A^*A$).

Generalizacija (1)

Ovdje opisujemo generalizaciju Jacobijeve metode:

- Za kompleksnu matricu A generira se niz dvodimenzionalnih transformacija P_i tako da je, uz $P = \prod_i P_i$, matrica $A_L = P^{-1}AP$ proizvoljno blizu normalne, tj. apsolutna vrijednost svakog elementa matrice $A_L A_L^* - A_L^* A_L$ je proizvoljno mala.
- Bazira se na sljedećem rezultatu [2]:

$$\inf_P N^2(P^{-1}AP) = \sum_{1 \leqslant i < n} |\lambda_i|^2$$

pri čemu je P regularna, λ_i su svojstvene vrijednosti $n \times n$ matrice A, a

$$N^2(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \, .$$

Generalizacija (2)

- Matrica P_i za pivotni par (k, m) je sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \delta_{ij} & (i, j &\neq k, m) \\ p_{kk} &= e^{-i\beta} \cos z & p_{km} &= -e^{i\alpha} \sin z \\ p_{mk} &= e^{-i\alpha} \sin z & p_{mm} &= e^{i\beta} \cos z \end{aligned}$$

  gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $z = x + iy$.
- Parametri bi se mogli birati tako da se minimizira $N^2(P_i^{-1} A P_i)$. Nažalost, takve parametre je teško pronaći.
- Zato dajemo eksplicitne aproksimacije optimalnih parametara za koje vrijedi

$$N^2(A) - N^2(P_i^{-1} A P_i) \geqslant \frac{1}{3} \frac{1}{n(n-1)} N^2(AA^* - A^* A) .$$

Učinak transformacije P_i na A (1)

Učinak transformacije P_i s pivotnim parom (k, m) na A. Označimo $A' = P_i^{-1} A P_i$.

$$
\begin{aligned}
a'_{ij} &= a_{ij} && (i, j \neq k, m) \\
a'_{ki} &= e^{i\beta} a_{ki} \cos z + e^{i\alpha} a_{mi} \sin z && (i \neq k, m) \\
a'_{ik} &= e^{-i\beta} a_{ik} \cos z + e^{-i\alpha} a_{im} \sin z \\
a'_{mi} &= e^{-i\beta} a_{mi} \cos z - e^{-i\alpha} a_{ki} \sin z \\
a'_{im} &= e^{i\beta} a_{im} \cos z - e^{i\alpha} a_{ik} \sin z \\
a'_{kk} &= (a_{kk} + a_{mm} + D_{km} \cos 2z + \xi_{km} \sin 2z)/2 \\
a'_{km} &= e^{i(\alpha+\beta)} (\eta_{km} - D_{km} \sin 2z + \xi_{km} \cos 2z)/2 \\
a'_{mk} &= e^{-i(\alpha+\beta)} (-\eta_{km} - D_{km} \sin 2z + \xi_{km} \cos 2z)/2 \\
a'_{mm} &= (a_{kk} + a_{mm} - D_{km} \cos 2z - \xi_{km} \sin 2z)/2
\end{aligned}
$$

Učinak transformacije P_i na A (2)

Pritom je na prošlom slajdu:

$$
\begin{aligned}
D_{km} &= a_{kk} - a_{mm} \\
B_{km} &= a_{km} + a_{mk} \\
E_{km} &= a_{km} - a_{mk} \\
\xi_{km} &= B_{km} \cos(\alpha - \beta) - iE_{km} \sin(\alpha - \beta) \\
\eta_{km} &= E_{km} \cos(\alpha - \beta) - iB_{km} \sin(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

Učinak transformacije P_i na $N^2(A)$

Grozomornim raspisivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta N^2(A) =& N^2(A) - N^2(A') \\ =& G(1 - \mathrm{csh}2y) - H\mathrm{sh}2y \\ &+ (|D|^2 + |\xi|^2)(1 - \mathrm{csh}4y)/2 + (i/2)(D\xi^* - D^*\xi)\mathrm{sh}4y\end{aligned}$$

pritom

$$G = \sum_{i \neq k,m} (|a_{ki}|^2 + |a_{ik}|^2 + |a_{mi}|^2 + |a_{im}|^2)$$

$$H = -\overline{K} \sin(\alpha - \beta) + \overline{\overline{K}} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\overline{K} = 2\Re\Big(\sum_{i \neq k,m} (a_{ki} a_{mi}^* - a_{ik}^* a_{im})\Big)$$

$$\overline{\overline{K}} = 2\Im\Big(\sum_{i \neq k,m} (a_{ki} a_{mi}^* - a_{ik}^* a_{im})\Big)$$

Maksimum od $\Delta N^2(A)$

- Deriviranjem po y i $\alpha - \beta$ pokaže se da $\Delta N^2(A)$ ima najviše jedan maksimum, a ako ga nema, postoji kvadrant $y - (\alpha - \beta)$ ravnine na kojem je $\Delta N^2(A) > 0$.
- Uvedimo notaciju

$$C = AA^* - A^*A, \qquad C' = A'A'^* - A'^*A'.$$

Tad je

$$2c'_{km} = e^{i(\alpha+\beta)}\left(i\left(-\frac{1}{2}\partial_y \Delta N^2(A)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh} 2y}\left(\partial_{\alpha-\beta}\Delta N^2(A)\right)\right).$$

- U točki maksimuma derivacije su 0 pa je i $c'_{km} = 0$.

Lema 1

Lema

Za fiksni (k, m) i proizvoljne x i β neka je $A' = S^{-1}AS$, gdje je S definirana parametrima α i y:

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\overline{c}_{km}}{\overline{\overline{c}}_{km}}$$

$$\mathrm{tgh} y = \frac{\sin(\alpha - \beta)\overline{c}_{km} - \cos(\alpha - \beta)\overline{\overline{c}}_{km}}{G + 2(|\xi|^2 + |D|^2)} .$$

Tad je

$$\Delta N^2(A) \geqslant \frac{4}{3} \frac{|c_{km}|^2}{G + 2(|\xi|^2 + |D|^2)} \geqslant \frac{1}{3}|c_{km}|^2 .$$

Lema 2

Lema

Neka je R realna rotacija definirana parametrima $\alpha = \beta = y = 0$ *i*

$$\mathrm{tg} 2x = -\frac{c_{kk} - c_{mm}}{2\overline{c}_{km}} .$$

Stavimo $A' = R^{-1}AR$. *Tad je* $c'_{kk} - c'_{mm} = 0$, $\overline{\overline{c}}'_{km} = \overline{\overline{c}}_{km}$ *i*

$$2\overline{c}'_{km} = 2\overline{c}_{km} \cos 2x - (c_{kk} - c_{mm}) \sin 2x .$$

Dokaz.

Direktnim računanjem c'_{km} i iz

$$c'_{kk} - c'_{mm} = (c_{kk} - c_{mm}) \cos 2x + 2\overline{c}_{km} \sin 2x .$$

Lema 3

Lema

Neka je pivotni par (k, m) odabran tako da je

$$4|c_{km}|^2 + (c_{kk} - c_{mm})^2 \geqslant \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \left(4|c_{ij}|^2 + (c_{ii} - c_{jj})^2\right).$$

Tad je

$$4|c_{km}|^2 + (c_{kk} - c_{mm})^2 \geqslant \frac{4}{n(n-1)} N^2(C).$$

Dokaz.

Raspisivanjem $\sum_{i<j}(c_{ii} - c_{jj})^2$, korištenjem činjenice da je $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(AA^* - A^*A) = 0$ i raspisivanjem $N^2(C)$. $\square$

Teorem

Neka je $A_0 = A$, uz $N^2(A) \leqslant 1$. Neka je $A_{i+1} = Q_i^{-1} A_i Q_i$, gdje je $Q_i = R_i S_i$ uz pivotni par (k_i, m_i) odabran tako da je $4|c_{k_i m_i}^{(i)}|^2 + (c_{k_i k_i}^{(i)} - c_{m_i m_i}^{(i)})^2$ barem aritmetička sredina svih takvih veličina. Transformacije R_i i S_i dane su parametrima:

$$\mathrm{tg} 2x_R = -\frac{c_{kk} - c_{mm}}{2\overline{c}_{km}}, \qquad \alpha_R = \beta_R = y_R = 0,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha_S - \beta_S) = -\frac{1}{2} \frac{2\overline{c}_{km} \cos 2x_R - (c_{kk} - c_{mm}) \sin 2x_R}{\overline{\overline{c}}_{km}},$$

$$\mathrm{tgh} y_S = \Big((1/2) \sin(\alpha_S - \beta_S)(2\overline{c}_{km} \cos 2x_R - (c_{kk} - c_{mm}) \sin 2x_R)$$
$$- \cos(\alpha_S - \beta_S)\overline{\overline{c}}_{km}\Big) / \Big(G_{km} + 2(|\xi'_{km}|^2 + |D'_{km}|^2)\Big)$$

Teorem (nastavak)

pri čemu je

$$\begin{aligned}\xi'_{km} =& (B_{km} \cos 2x_R - D_{km} \sin 2x_R) \cos(\alpha_S - \beta_S) \\ & - iE_{km} \sin(\alpha_S - \beta_S), \\ D'_{km} =& D_{km} \cos 2x_R + B_{km} \sin 2x_R .\end{aligned}$$

β_S i x_S su proizvoljni. Tad je

$$\lim_{i \to \infty} N^2(C_i) = 0 .$$

Dokaz teorema

Stavimo $A'_{i+1} = R_i^{-1} A R_i$ i $A_{i+1} = S_i^{-1} A'_{i+1} S_i$. Koristeći lemu 2 imamo

$$\mathrm{tg}(\alpha_S - \beta_S) = -\overline{c}'_{km} / \overline{\overline{c}}'_{km} \,,$$

$$\mathrm{tgh} y_S = \frac{\sin(\alpha_S - \beta_S)\overline{c}'_{km} - \cos(\alpha_S - \beta_S)\overline{\overline{c}}'_{km}}{G_{km} + 2(|\xi'_{km}|^2 + |D'_{km}|^2)}$$

gdje su sad ξ'_{km} i D'_{km} definirani kao na početnim slajdovima za A'_{i+1}.

Dokaz teorema (nastavak)

Iz leme 1 i invarijantnosti N^2 na rotacije slijedi

$$\Delta N^2(A_i) = \Delta N^2(A_i') \geqslant |{c'_{km}}^{(i)}|^2/3 = (4|c_{km}^{(i)}|^2 + (c_{kk}^{(i)} - c_{mm}^{(i)})^2)/12\,.$$

Stoga, prema lemi 3 imamo

$$\Delta N^2(A_i) \geqslant 1/(3n(n-1))N^2(C_i)\,.$$

Budući da $\Delta N^2(A_i) \to 0$, mora i $N^2(C_i) \to 0$. $\square$

Dijagonalizacija

- Rezultat primjene opisane metode je približno normalna matrica. Za očitavanje svojstvenih vrijednosti potrebno ju je dijagonalizirati.
- Jedno poboljšanje bilo bi "ugraditi" dijagonalizaciju u samu metodu biranjem proizvoljnih parametara x i α tako da se minimizira

$$\tau^2(A) = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 .$$

Za detalje vidjeti [1, str. 81]. Nažalost, u članku nema dokaza da takav izbor parametara doista dijagonalizira matricu.

Realne matrice

- U slučaju realne početne matrice ideja je da se ostane u polju realnih brojeva prilikom računanja, a da dijagonalizacija također bude ugrađena u metodu.
- Izbor parametara koji bi trebali voditi do toga može se vidjeti u [1, str. 81]. U slučaju simetrične matrice ovakva metoda se reducira na Jacobijevu.
- Nažalost, dokaza konvergencije metode nema u članku.

P. J. Eberlein.
A Jacobi-like Method for the Automatic Computation of Eigenvalues and Eigenvectors of an Arbitrary Matrix.
Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 10(1):74–88, Mar 1962.

L. Mirsky.
On the Minimization of Matrix Norms.
The American Mathematical Monthly, 65(2):106–107, Feb 1958.