Mini-seminar: Zadatci 2.18. i 2.19.

Filip Nikšić

21. listopada 2006.

Riješimo prvo pomoćni zadatak koji će kasnije biti iskorišten.

2.4. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i $x_0 \in S$. Dokažite: $\operatorname{aff} S = x_0 + \operatorname{lin}(S - x_0)$ ("lin" označava linearnu ljusku).

Rj. Neka je $x \in \operatorname{aff} S$. Tada postoje $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in S$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, takvi da je $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ i $x = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i$. Slijedi da je

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{k} t_i \right) x_0 = \sum_{i=1}^{k} t_i (x_i - x_0).$$

No, to upravo znači da je $x - x_0$ linearna kombinacija vektora iz $S - x_0$ pa je $x - x_0 \in \operatorname{lin}(S - x_0)$, tj. $x \in x_0 + \operatorname{lin}(S - x_0)$.

Obrnuto, neka je $x \in \operatorname{lin}(S - x_0)$. Tada postoje $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in S$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, takvi da je $x = \sum_{i=1}^{k} t_i (x_i - x_0)$. Imamo:

$$x_0 + x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i (x_i - x_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i \right) x_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i x_i$$

pa je, zbog $1 - \sum_{i=1}^{k} t_i + \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, $x_0 + x \in \operatorname{aff} S$.

2.18. Za točke $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su *afino nezavisne* ako je dimenzija afine ljuske $\operatorname{aff}\{x_0, \dots, x_k\}$ jednaka k. Dokažite da su točke afino nezavisne ako i samo ako iz $\sum_{i=0}^{k} t_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} t_i = 0$ slijedi $t_0 = \ldots = t_k = 0$.

Rj. Uvedimo oznake $S := \{x_0, \dots, x_k\}$, $A := \operatorname{aff} S$, $L := \operatorname{lin}(S - x_0)$. Tada iz prethodnog zadatka slijedi da je $A = x_0 + L$. Po definiciji je $\dim A = \dim L$.

Pretpostavimo prvo da su točke $x_0, \ldots, x_k$ afino nezavisne, što znači da je $\dim A = \dim L = k$.

Kako $S - x_0 = \{0, x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ sadrži nul-vektor, on nije linearno nezavisan. Skup $S' := (S - x_0)\backslash\{0\}$ s izbačenim nul-vektorom također razapinje L. Primijetimo da skup S' ima k elemenata i razapinje L pa je S' baza od L.

Neka su $t_i \in \mathbb{R}$ takvi da je $\sum_{i=0}^k t_i x_i = 0$ i $\sum_{i=0}^k t_i = 0$. Tada je i $\left(\sum_{i=0}^k t_i\right) x_0 = 0$ pa je

$$\sum_{i=0}^k t_i x_i - \sum_{i=0}^k t_i x_0 = \sum_{i=0}^k t_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^k t_i (x_i - x_0) = 0.$$

Ova posljednja jednakost zbog činjenice da je S' baza od L povlači da je $t_1 = \ldots = t_k = 0$. No, tada je i $t_0 = \sum_{i=0}^k t_i = 0$. Time je jedan smjer dokazan.

Pretpostavimo sada da $\sum_{i=0}^k t_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^k t_i = 0$ povlači $t_0 = \ldots = t_k = 0$.

Neka su $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ takvi da je $\sum_{i=1}^k t_i (x_i - x_0) = 0$. Pokušajmo dokazati da moraju biti $t_i = 0$. Označimo $t_0 := -\sum_{i=1}^k t_i$. Vrijedi da je $\sum_{i=0}^k t_i = 0$. Osim toga, vrijedi

$$\sum_{i=0}^k t_i x_i = t_0 x_0 + \sum_{i=1}^k t_i x_i = -\sum_{i=1}^k t_i x_0 + \sum_{i=1}^k t_i x_i = \sum_{i=1}^k t_i (x_i - x_0) = 0.$$

Zbog pretpostavke je $t_0 = t_1 = \ldots = t_k = 0$ pa je prije definirani S' linearno nezavisan skup. No, vidjeli smo da S' razapinje L pa je on baza za L. Kako S' ima k elemenata, slijedi da je $\dim L = \dim A = k$, tj. točke $x_0, \ldots, x_k$ su afino nezavisne.

2.19. (Baricentričke koordinate) Ako su $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ afino nezavisne, dokažite da se svaki $x \in \operatorname{conv}\{x_0, \ldots, x_k\}$ može na jedinstven način prikazati kao $x = \sum_{i=0}^k t_i x_i$, $\sum_{i=0}^k t_i = 1$, $t_i \geq 0$.

Rj. Označimo sa $S := \{x_0, \ldots, x_k\}$. Neka je $x \in \operatorname{conv} S$. Tada se x može prikazati na traženi način.

Pretpostavimo da postoje dva prikaza od x, tj. da je

$$x = \sum_{i=0}^k t_i x_i, \ \sum_{i=0}^k t_i = 1, \ t_i \geq 0,$$

$$x = \sum_{i=0}^{k} s_i x_i, \ \sum_{i=0}^{k} s_i = 1, \ s_i \geq 0.$$

Imamo:

$$0 = x - x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i - \sum_{i=0}^{k} s_i x_i = \sum_{i=0}^{k} (t_i - s_i) x_i.$$

Nadalje,

$$\sum_{i=0}^{k} (t_i - s_i) = \sum_{i=0}^{k} t_i - \sum_{i=0}^{k} s_i = 1 - 1 = 0.$$

Zbog afine nezavisnosti točaka $x_0, \ldots, x_k$ i prethodnog zadatka slijedi da je $t_i - s_i = 0$, tj. $t_i = s_i$ za svaki $i = 0, \ldots, k$. Prema tome, prikaz točke x je jedinstven.